



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ Etapă locală, SĂLAJ , 11.02.2023

XII osztály

1 Feladat

Adott az $x \circ y = xy + 4(x + y) + 12$ művelet, ahol $x, y \in \mathbb{R}$.

Ha $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$, határozzátok meg az $1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ n$ szám utolsó két számjegyét.

2 Feladat

Adott a $G = \left\{ A_{a,b} = \begin{pmatrix} a + 3b & b \\ 4b & a + 3b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_6, \det(A) = 1 \right\}$ halmaz.

(5p) a) Igazoljátok, hogy $(G, \cdot)$ egy olyan negyedrendű Ábel-féle csoport, ahol minden elem megegyezik az inverzával.

(2p) b) Határozzátok meg a $(G, \cdot)$ részcsoportjait.

3 Feladat

(4p) a) Adott az $f: I \rightarrow \mathbb{R}_+$, $I \subset \mathbb{R}$, egy folytonos függvény I -n, melynek a deriváltja is folytonos. Számítsátok ki $\int \frac{f(x) + f'(x)}{f(x) + e^{-x}} dx$.

(3p) b) Számítsátok ki $\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x + e^{-x}} dx$, $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$.

4 Feladat

Igazoljátok, hogy az $f: \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3}, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right] \end{cases}$ függvénynek van primitív függvénye a $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ intervallumon,

majd határozzátok meg egy ilyen primitív függvényt.

Munkaidő: 3 óra.

Minden feladat 7 pontot ér.