OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
22 februarie 2014

CLASA a XI-a

1. Fie $n,k \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ şi $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^{k+1} = B^{k+1}$ şi $A^k B = B^k A$.

Demonstraţi că dacă matricea $A^k + B^k$ este inversabilă atunci matricea A este inversabilă.

2. Dacă $A \in M_2(\mathbb{C})$ este matrice nesingulară, să se demonstreze că $AB - BA \neq A^2, \forall B \in M_2(\mathbb{C})$.

3. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale.

a) **(4p)** Să se arate că dacă şirul $(x_n^2)_{n\geq 1}$ este convergent, atunci şirul $(\cos x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

b) **(3p)** Să se arate că dacă $x_n \in (-1, 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, iar şirurile $(x_n^2)_{n\geq 1}$ şi $(\sin x_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

4. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n + f(k)} = 0$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.