

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 22.02.2019

Clasa a V-a

Barem de corectare și notare

1. Fie n un număr natural pentru care $y > x$, unde $x = 2^{2019} + 2^{2021}$ și $y = 2^n + 2^{n+1}$. Determinați cea mai mică valoare posibilă a lui n pentru care $y - x$ este cub perfect.

Prof. Camelia Pîrvu

Soluție:

$$x = 2^{2019} \cdot 5 \text{ și } y = 2^n \cdot 3 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Cum } y > x \Rightarrow 2^n \cdot 3 > 2^{2019} \cdot 5 \Rightarrow 2^{n-1} \cdot 6 > 2^{2019} \cdot 5 \Rightarrow n-1 \geq 2019 \Rightarrow n \geq 2020 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Pentru } n = 2020 \Rightarrow y - x = 2^{2020} \cdot 3 - 2^{2019} \cdot 5 = 2^{2019} = (2^{673})^3 = c.p. \dots\dots\dots 2p$$

2. a) Calculați $1 + 3 + 3^2 + 3^3$.

- b) Arătați că suma $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2019}$ este un număr divizibil cu 20.

Prof. Otilia Sorana Bejan

Soluție

a) 40 (2p)

b) suma are 2020 de termeni, facem grupe de câte 4 Obținem

$$(1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + \dots + (3^{2016} + 3^{2017} + 3^{2018} + 3^{2019}) = \dots\dots\dots (1p)$$

$$(1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^4(1 + 3 + 3^2 + 3^3) + \dots + 3^{2016}(1 + 3 + 3^2 + 3^3) = 40(1 + 3^4 + \dots + 3^{2016}) = \dots\dots\dots (3p)$$

$$20 \cdot 2(1 + 3 + 3^2 + 3^3) \Rightarrow \text{suma este divizibilă cu 20.} \dots\dots\dots (1p)$$

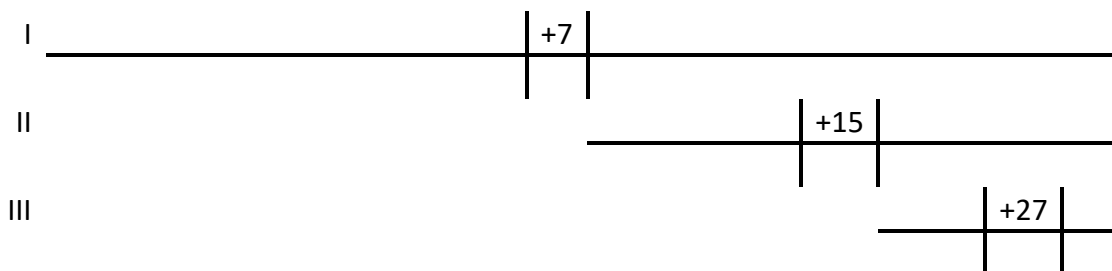
3. Un șofer parcurge un traseu în 4 zile. În prima zi parcurge jumătate de traseu și încă 7 km, a doua zi jumătate din rest și încă 15 km, a treia zi jumătate din rest și încă 27 de km, iar în a patra zi parcurge ultimii 50 km.

- a) Câți km a parcurs în primele 3 zile șoferul?

- b) Câți km are traseul?

Prof. Avramescu Alexandru

Soluție:



50+27=77 km	1p
77+27=104 km (III)	1p
77·2=154 km	1p
154+15=169 km	
169+15=184 km (II).....	1p
169·2=338 km	1p
338+7=345 km	
345+7=352 km (I)	1p
345·2=690 km (are traseul)	1p

4. Aflați numerele $\overline{ab}$, cu cifre nenule diferite, pentru care $\overline{ab} = b^{a+b}$.

prelucrare Supliment Gazeta Matematică

Soluție:

Dacă $b \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow b^{a+b} > 4^4 = 256 > \overline{ab}$ (2p)

Dacă $b = 3 \Rightarrow \overline{a3} = 3^{a+3}$. Pentru $a = 1 \Rightarrow 13 = 3^4$ fals.

Pentru $a \geq 2 \Rightarrow 3^{a+3} \geq 3^5 = 243 > \overline{a3}$ (2p)

Dacă $b = 2 \Rightarrow \overline{a2} = 2^{a+2}$. Pentru $a = 1 \Rightarrow 12 = 2^3$ fals. Pentru $a = 3 \Rightarrow 32 = 2^5$ adevărat $\Rightarrow \overline{ab} = 32$.

Pentru $a = 4 \Rightarrow 42 = 2^6$ fals. Pentru $a \geq 5 \Rightarrow 2^{a+2} \geq 2^7 = 128 > \overline{a2}$. (2p)

Dacă $b = 1 \Rightarrow \overline{a1} = 1^{a+1}$ Dar, $1^{a+1} = 1 < \overline{a1}$. (1p)