

Inspectoratul Școlar Județean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naționale de matematică
Craiova, 16 februarie 2014
Clasa a XI-a

Problema 1. Fie $a_0, a_1, \dots, a_k$ ($k \geq 1$) numere reale astfel încât $a_0 + a_1 + \dots + a_k = 0$.
Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 \sqrt[3]{n} + a_1 \sqrt[3]{n+1} + \dots + a_k \sqrt[3]{n+k})$.

Problema 2. Fie a și b două numere reale pozitive, cu $a < b$.
Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt[n]{a^n + b^n}\} = \{b\}$, unde $\{ \}$ este funcția parte fracționară.

Gazeta Matematică Nr. 1/2013

Problema 3. Fie $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție pentru care $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ există și este finită.
Să se arate că dacă $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(\sqrt{xy})$ pentru orice $x, y > 0$, atunci f este o funcție constantă.

Problema 4. Să se arate că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Z}$, sistemul
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x &= ax + by + cz \\ \frac{1}{2}y &= cx + ay + bz \\ \frac{1}{2}z &= bx + cy + az \end{aligned}$$
 admite numai soluția $x = y = z = 0$.

Notă :

1. Timp de lucru: 3 ore
2. Toate subiectele sunt obligatorii
3. Fiecare problemă se va nota cu puncte de la 1 la 7 (un punct din oficiu)