

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Clasa a IX-a M₁

Faza locală

17 februarie 2018

Subiectul 1.(7p)

a) Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit astfel: $x_1 = \frac{1}{6}$ și $x_{n+1} = \frac{n+1}{n+3} \left(x_n + \frac{1}{2} \right)$, $\forall n \geq 1$.

Să se calculeze x_{2018} . (4p)

b) Să se rezolve ecuația $\left\lfloor \frac{3x-1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3x+1}{4} \right\rfloor = 2018$ (3p)

Subiectul 2.(7p)

Fie ABC un triunghi cu lungimile laturilor $AB = a$, $BC = a$, $AC = b$. Pentru orice punct D din planul triunghiului ABC cu proprietatea că $\overrightarrow{BD} = a \overrightarrow{BA} + c \overrightarrow{BC}$. Aratați ca semidreapta (BD este bisectoarea unghiului ABC din triunghiul ABC.

Subiectul 3.(7p)

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația egală cu $\frac{1}{7}$, iar termenii a_1 și a_n sunt numere întregi nenule. Știind că suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice este 2018, se cere :

a) Să se determine n . (3p)

b) Să se determine numărul termenilor din sumă care sunt numere întregi. (4p)

Subiectul 4.(7p)

a) Se consideră $a, b > 0$, $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^n + b^n = 2$. Demonstrați că $ab \leq 1$ (3p)

b) Dacă $\frac{x}{x^2+x+1} = t \in \mathbb{R}^*$, exprimați în funcție de t expresia $\frac{x^3}{x^6+x^3+1}$ (4p)

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7p.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Clasa a IX-a M₁

Faza locală

17 februarie 2018

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzător.
- Nu se acorda fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul 1.(7p)

a)

$$x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{2}{4} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{6}, x_3 = \frac{3}{5} \left(\frac{2}{6} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{6} \dots\dots\dots 1p$$

Demonstrăm prin inducție că $x_n = \frac{n}{6}$

$$P(n) : x_n = \frac{n}{6}$$

I .Etapă de verificare P(1): $x_1 = \frac{1}{6}$ Adevărat $\dots\dots\dots 1p$

II .Etapă demonstrației

Presupunem că P(k) adevărată și demonstrăm că P(k+1) este adevărată , $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$P(k) : x_k = \frac{k}{6} \text{ adevărată}$$

$$P(k+1) : x_{k+1} = \frac{k+1}{k+3} \left(x_k + \frac{1}{2} \right) = \frac{k+1}{k+3} \left(\frac{k}{6} + \frac{1}{2} \right) = \frac{k+1}{k+3} \cdot \frac{k+3}{6} = \frac{k+1}{6} \text{ adevărată } \dots\dots\dots 1p$$

Din I. și II. Identitatea este adevărată pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$x_{2018} = \frac{2018}{6} \dots\dots\dots 1p$$

b) $\left\lceil \frac{3x-1}{4} \right\rceil + \left\lceil \frac{3x+1}{4} \right\rceil = 2018$

$$\text{Notăm } \frac{3x-1}{4} = y, \frac{3x+1}{4} = y + \frac{1}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Ecuația devine } [y] + \left[y + \frac{1}{2} \right] = 2018 \Rightarrow \text{Folosind identitatea lui Hermite } [y] + \left[y + \frac{1}{2} \right] = [2y] = 2018 \Rightarrow 2y \in [2018, 2019) \Rightarrow y \in [1009, \frac{2019}{2}) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Finalizare } x \in \left[\frac{4037}{3}, \frac{4039}{3} \right) \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 2.(7p)

$$\text{Din teorema bisectoarei avem } \frac{AE}{EC} = \frac{BA}{BC} = \frac{c}{a} \rightarrow \overline{AE} = \frac{c}{a} \overline{EC} \dots\dots\dots 3p$$

$$\overline{AB} + \overline{BE} = \frac{c}{a} (\overline{EB} + \overline{BC}) \rightarrow (a+c) \overline{BE} = a \overline{BA} + c \overline{BC}, \dots\dots\dots 2p$$



$\overline{BD} = a\overline{BA} + c\overline{BC} \rightarrow (a+c)\overline{BE} = \overline{BD}$, vectorii $\overline{BE}, \overline{BD}$ sunt coliniari și cum au comuna originea rezulta că (BE și BD coincid deciseșemiadrapta (BD este bisectoarea unghiului B....2p

Subiectul 3.(7p)

a) Fie $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2018 \Rightarrow a_1 + a_n = \frac{4036}{n}$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow a_n - a_1 = \frac{n-1}{7} \dots\dots\dots 2p$

Atunci $a_n = \frac{2018}{n} + \frac{n-1}{14}$; $a_1 = \frac{2018}{n} - \frac{n-1}{14}$

Dar $a_1, a_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \in D_{2018}$ și $n = 14k + 1, k \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow n = 1009 \dots\dots\dots 1p$

b) $a_1 = -70, a_{1009} = 74 \dots\dots\dots 2p$

Dacă rația este $\frac{1}{7}$, atunci termenii care sunt numere întregi sunt :

$a_1 = -70, a_8 = -69, a_{15} = -68, \dots, a_{1009} = 74$. Numarul lor este 145.

$a_{7 \cdot 0 + 1}, a_{7 \cdot 1 + 1}, a_{7 \cdot 2 + 1}, \dots, a_{7 \cdot 144 + 1}$ sunt numere întregi.

Numarul lor este 145.2p

Subiectul 4.(7p)

a) $2 = a^n + b^n \geq 2 \cdot \sqrt{a^n \cdot b^n} \Rightarrow (ab)^n \leq 1$ și deci $ab \leq 1 \dots\dots\dots 3p$

b) $\frac{x^2+x+1}{x} = \frac{1}{t} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{1}{t} - 1 \dots\dots\dots 2p$

Notăm fracția căutată cu F și avem $\frac{1}{F} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 1 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1$

Se deduce $F = \frac{t^3}{3t^3-3t+1} \dots\dots\dots 2p$

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Clasa a IX-a M₂

Faza locală

17 februarie 2018

Type equation here.

Subiectul 1.(7p)

Se consideră numărul $A = (\sqrt{2} + 1) \cdot (1 - a\sqrt{2})$.

- Determinați $a \in \mathbb{Q}$ pentru care $A \in \mathbb{Q}$. (1p)
- Arătați că există $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pentru care $A \in \mathbb{Q}$, $A \neq 0$. (2p)
- Dacă $x, y, z \in \mathbb{Q}^*$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x}$, arătați că $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ este număr rațional. (4p)

Subiectul 2.(7p)

Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| < 5\}$.

Fie a cel mai mare număr întreg negativ care nu aparține mulțimii A și

$$b = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} - |1 - \sqrt{3}| \cdot (1 + \sqrt{3})^2.$$

- Arătați că $b = -\sqrt{3} - 1$ și comparați numerele a și b .
- Dacă $a = -2$ și numerele $a, x, y, 2a$ sunt în progresie aritmetică, calculați $x + y + \frac{x}{y}$.

Subiectul 3.(7p)

Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică cu rația $r \neq 0$; știind că suma primilor 10 termeni este 55 și că termenii a_1, a_3, a_9 , în această ordine, formează o progresie geometrică, determinați termenul de rang 100.

Subiectul 4.(7p)

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $[x + 2018] - \left\lceil \frac{3x - 2011}{2} \right\rceil = \frac{x}{2} + 2018$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a .

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7p.



BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Clasa a IX-a M₂

Faza locală

17 februarie 2018

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul 1.(7p)

- a) $A = (1-a) \cdot \sqrt{2} + 1 - 2a$ este din $\mathbb{Q}$ dacă $a = 1$ 1p
- b) Considerăm A o valoare arbitrară și obținem $a = 1 - \frac{1+A}{2+\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 2p
- c) Din ipoteză obținem $yz - xz - xy = 0 \Rightarrow$ 1p
 $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz = (x - y - z)^2$
 Așadar $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \in \mathbb{Q}$ 3p

Subiectul 2.(7p)

- a) Determină $A = (-2; 3)$ 1p
 Stabilește $a = -2$ 1p
 Demonstrează $b = -1 - \sqrt{3}$ 1p
 Demonstrează $b < a$ 1p
- b) Determină rația $r = \frac{a}{3}$ 1p
 Finalizare $x + y + \frac{x}{y} = -\frac{26}{5}$ 2p

Subiectul 3. (7p)

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})10}{2} = 55 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$a_3^2 = a_1 \cdot a_9 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\begin{cases} a_1 + a_{10} = 11 \\ (a_1 + 2r)^2 = a_1(a_1 + 8r) \end{cases} \quad \dots\dots\dots 2p$$



$$\begin{cases} 2a_1 + 9r = 11 \\ r(r - a_1) = 0 \end{cases}, r \neq 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ r = 1 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

$$a_{100} = 100 \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 4.(7p)

$$[x + 2018] = [x] + 2018 \text{ ecuatia devine: } [x] - \left[\frac{3x-1011}{2} \right] = \frac{x}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Cum } [x], \left[\frac{3x-1011}{2} \right] \text{ sunt nr. intregi rezulta ca } \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}, x = 2k, k \in \mathbb{Z}. \dots\dots\dots 2p$$

Pentru $x = 2k, k \in \mathbb{Z}$, ecuatia devine

$$2k - \left[\frac{6k-1011}{2} \right] = k \Leftrightarrow \left[\frac{6k-1011}{2} \right] = k \Leftrightarrow k \leq \frac{6k-1011}{2} < k+1 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Se inmulteste totul cu 2, de unde rezulta sistemul } \begin{cases} 6k - 1011 \geq 2k \\ 6k - 1011 < 2k + 2 \end{cases} \rightarrow k \in \left[\frac{1011}{4}, \frac{1013}{4} \right)$$

$$\text{de unde } x = 2 \cdot 253 = 506. \dots\dots\dots 2p$$



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Clasa a X-a M₁

Faza locală

17 februarie 2018

Subiectul 1.(7p)

Demonstrați că :

a) $(\forall) a, b, c \in \mathbb{R}_+ \text{ avem } \sqrt{ac} + \sqrt{bd} \leq \sqrt{(a+b)(c+d)};$

b) $\sqrt{a \log_{a+b} \sqrt{2a}} + \sqrt{b \log_{a+b} \sqrt{2b}} \leq \sqrt{a+b}, (\forall) a, b \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$

Subiectul 2.(7p)Fie funcția $f : C \rightarrow C, f(z) = 4z - 3\bar{z}$.

a) Demonstrați că funcția este bijectivă și determinați inversa sa;

b) Determinați funcția $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori}}$.**Subiectul 3.(7p)**Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $z_2 + z_3 \neq 0$ și $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_2 + z_3| = |z_1|$.Calculați valoarea expresiei $\frac{z_1}{z_2 + z_3}$.**Subiectul 4.(7p)**Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația : $\sqrt[3]{x\sqrt{x}} - \sqrt[7]{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = 6\sqrt[12]{x\sqrt{x}}$.*Notă : Toate subiectele sunt obligatorii.**Timp de lucru 3 ore.**Fiecare subiect este notat de la 0 la 7p.*

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**

Clasa a X-a M₁

Faza locală

17 februarie 2018

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzător.
- Nu se acorda fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul 1.(7p)

a) Radicând la pătrat obținem $(\sqrt{ac} + \sqrt{bd})^2 \leq (\sqrt{(a+b)(c+d)})^2$
 $ac + 2\sqrt{acbd} + bd \leq ac + bc + ad + bd$; $bc - 2\sqrt{acbd} + ad \geq 0$;
 $(\sqrt{bc} - \sqrt{ad})^2 \geq 0$; adevărat $(\forall) a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$ 2p

b) Aplicând punctul a pentru $c = \log_{a+b} \sqrt{2a}$ și $d = \log_{a+b} \sqrt{2b}$ obținem

$$\sqrt{a \log_{a+b} \sqrt{2a}} + \sqrt{b \log_{a+b} \sqrt{2b}} \leq \sqrt{(a+b)(\log_{a+b} \sqrt{2a} + \log_{a+b} \sqrt{2b})} \dots\dots\dots 2p$$

$$\log_{a+b} \sqrt{2a} + \log_{a+b} \sqrt{2b} = \log_{a+b} 2\sqrt{ab}; m_g \leq m_a; \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\log_{a+b} 2\sqrt{ab} \leq \log_{a+b} 2 \cdot \frac{a+b}{2} = \log_{a+b} (a+b) = 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$\sqrt{a \log_{a+b} \sqrt{2a}} + \sqrt{b \log_{a+b} \sqrt{2b}} \leq \sqrt{a+b} \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 2.(7p)

a) f injectivă $(\forall) z_1, z_2 \in C, f(z_1) = f(z_2) \rightarrow z_1 = z_2 \dots\dots\dots 1p$

f surjectivă $(\forall) y = m + ni \in C, (\exists) z = a + bi$ a.i. $y = f(z)$ de unde $a = m$ și $b = \frac{n}{7}$ deci

$$z = m + \frac{n}{7}i = \frac{7m + ni}{7} \dots\dots\dots 1p$$

f bijectivă, deci inversabilă $f^{-1}(y) = \frac{4y + 3\bar{y}}{7} \dots\dots\dots 1p$

b) $f_2 = f \circ f(z) = 4(4z - 3\bar{z}) - 3(4\bar{z} - 3z) = 25z - 24\bar{z} = \frac{7^2 + 1}{2}z - \frac{7^2 - 1}{2}\bar{z}$

$$f_3(z) = f_2 \circ f(z) = 25(4z - 3\bar{z}) - 24(4\bar{z} - 3z) = 172z - 171\bar{z} = \frac{7^3 + 1}{2}z - \frac{7^3 - 1}{2}\bar{z} \dots\dots\dots 2p$$



Inductiamatematica $f_n(z) = \frac{7^n + 1}{2}z - \frac{7^n - 1}{2}\bar{z}$ 2p

Subiectul 3.(7p)

a) Fie $\frac{z_1}{z_2 + z_3} = a + bi$ Din $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_2 + z_3|$ obținem

$$\left| (z_2 + z_3) \left(\frac{z_1}{z_2 + z_3} + 1 \right) \right| = |z_2 + z_3|; (a+1)^2 + b^2 = 1 \dots\dots\dots 2p$$

Din $|z_2 + z_3| = |z_1|$ obținem $a^2 + b^2 = 1$ 2p

Prin rezolvarea sistemului $\begin{cases} (a+1)^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$ obținem $a = -\frac{1}{2}$, $b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2 p

Deci valoarea raportului poate fi $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sau $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 1p

Subiectul 4.(7p)

Folosind proprietatile radicalilor obținem succesiv

$$\sqrt[3]{\sqrt{x^3}} - \sqrt[7]{\sqrt{x^2}x\sqrt{x}} = 6\sqrt[12]{\sqrt{x^2}x} \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt[6]{x^3} - \sqrt[7]{\sqrt{\sqrt{x^6}x}} = 6\sqrt[24]{x^3} \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 6\sqrt[8]{x} \dots\dots\dots 1p$$

Notăm $\sqrt[8]{x} = t$, ecuația devine $t^4 - t^2 = 6t$1p

$$t(t^3 - t - 6) = 0$$

$t_1 = 0$, de unde $x_1 = 0$1p

$$t^3 - t - 6 = 0, (t-2)(t^2 + 2t + 3) = 0$$

$t-2=0$, $t_2=0$, $x_2=2^8$, $x_2=256$ 1p

$t^2 + 2t + 3 = 0$, $\Delta = -8 < 0$ nu are soluții reale

Soluțiile reale sunt 0 și 256.....1p

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ****Clasa a X-a M₂****Faza locală****17 februarie 2018****Subiectul 1.(7p)**

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Știind ca $f(64)=4$, sa se calculeze:

- a) $n^2 + n + 1$ (3p)
- b) $p = f(2) f(2^2) \dots f(2^9)$, pentru n aflat la punctul anterior. (4p)

Subiectul 2.(7p)

- a) Arătați că $\sqrt[3]{\sqrt{50} + 7} - \sqrt[3]{\sqrt{50} - 7} = 2$; (3p)
- b) Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^3 + 3x - 14 = 0$. (4p)

Subiectul 3.(7p)

- a) Demonstrați că numărul $a = 8^{\log_2 3} - \log_2 48 + \log_2 36 - \log_2 3$ este pătrat perfect; (3p)
- b) Dacă $u, t \in (0, \infty)$ și $u^2 + t^2 = 5ut$, atunci $\lg \frac{u+t}{\sqrt{7}} = \frac{\lg u + \lg t}{2}$. (4p)

Subiectul 4.(7p)

Fie $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

- a) Demonstrați că $z^2 - z + 1 = 0$ și $z^3 + 1 = 0$; (2p)
- b) Arătați că $z^{2017} - z^2$ este număr real; (2p)
- c) Arătați că $(1-z)(1+z^2)(1-z^{2017})(1+z^{2018})$ este cub perfect. (3p)

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7p.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Clasa a X-a M₂

Faza locală

17 februarie 2018

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul 1.(7p)

- a) Din condiția $f(64)=4$ rezultă $\sqrt[n]{64}=4$ obținem $n=3$ 2p
 $n^2+n+1=13$ 1p
- b) $p=f(2) f(2^2) \dots f(2^9) = \sqrt[n]{2^{1+2+\dots+9}}$ 2p
 $p = \sqrt[n]{2^{45}}$ 1p
 $n=3, p=2^{15}$ 1p

Subiectul 2.(7p)

- a) Folosind $(a-b)^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$,

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt{50}+7} - \sqrt[3]{\sqrt{50}-7}\right)^3 = \sqrt{50}+7 - \sqrt{50}+7 - 3\sqrt[3]{(\sqrt{50}+7)(\sqrt{50}-7)}\left(\sqrt[3]{\sqrt{50}+7} - \sqrt[3]{\sqrt{50}-7}\right)$$

 $= 14 - 3 \cdot 2 = 8$ 3p
- b) $x^3+3x-14 = (x-2)(x^2+2x+7)$ 2p
 $x_1=2, x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{6}$ 2p

Subiectul 3.(7p)

- a) $8^{\log_2 3} = 2^{3\log_2 3} = 2^{\log_2 27} = 27$; $\log_2 48 - \log_2 36 + \log_2 3 = \log_2 \frac{48}{36} \cdot 3 = \log_2 4 = 2$ 2p
 $a = 27-2 = 25 = 5^2$ deci pătrat perfect1p
- b) $u^2 + t^2 + 2ut = 5ut + 2ut; (u+t)^2 = 7ut; \left(\frac{u+t}{\sqrt{7}}\right)^2 = ut$ 2p
 $\lg \left(\frac{u+t}{\sqrt{7}}\right)^2 = \lg ut$; $\lg \frac{u+t}{\sqrt{7}} = \frac{\lg u + \lg t}{2}$ 2p

Subiectul 4.(7p)

- a) Calcul direct $z^2-z+1=0$ și $z^3+1=0$ 2p
- b) $z^{2017} = z^{3 \cdot 672 + 1} = (z^3)^{672} \cdot z = z$; $z^{2017} - z^2 = z - z^2 = 1 \in R$ 2p
- c) $z^{2018} = z^2$; $(1-z)(1+z^2)(1-z^{2017})(1+z^{2018}) =$
 $(1-z)(1+z^2)(1-z)(1+z^2) = [(1-z)(1+z^2)]^2 = (1-z+z^2-z^3)^2 = 1$ care este cub perfect 3p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Clasa a XI-a M₁

Faza locală

17 februarie 2018

Subiectul 1.(7p)

Se consideră matricele $A, B \in M_n(R)$ cu proprietatea că $B - A = I_n$. Ce condiție trebuie să îndeplinească matricea A astfel încât, oricare ar fi $k \in N^*$, să aibă loc egalitatea

$$B + B^2 + \dots + B^k = kI_n + \frac{k(k+1)}{2} \cdot A ?$$

Subiectul 2.(7p)

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{pmatrix}, x \in R$

a) Arătați că $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos^n 2x}{2} & \frac{1 - \cos^n 2x}{2} \\ \frac{1 - \cos^n 2x}{2} & \frac{1 + \cos^n 2x}{2} \end{pmatrix}$, pentru n natural nenul. (3p)

b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \det A^k}{\det \left(\sum_{k=1}^n A^k \right)}$. (4p)

Subiectul 3.(7p)

Fie $(a_n)_{n \in N}$ un șir astfel încât $a_0 > 0$ și $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2 + a_n + 1}, \forall n \in N$.

a) Să se arate că $(a_n)_{n \in N}$ este strict crescător și nemărginit. (3p)

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt[3]{n}}$. (4p)

Subiectul 4.(7p)

Se consideră funcția $f : R \rightarrow R$ cu proprietatea că $|f(x) - x \sin x| \leq |x^3|$, oricare ar fi

$x \in R$. Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7p.

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**

Clasa a XI-a M₁

Faza locală

17 februarie 2018

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul 1.(7p)

Pentru $k = 1 \Rightarrow B = I_n + A$ 1p

Pentru $k = 2 \Rightarrow B + B^2 = 2I_n + 3A$ 1p

$B + B^2 = 2I_n + 3A + A^2$, deci $A^2 = O_n \Rightarrow A^m = O_n, \forall m \geq 2, m \in \mathbb{N}$ 2p

$\Rightarrow B^m = (I_n + A)^m = I_n + mA$ de unde rezultă relația. 2p

În concluzie $A^2 = O_n$ 1p

Subiectul 2.(7p)

a) Pentru $n = 1$ egalitatea este verificată 1p

Folosind relațiile $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ și $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ 1p

Verificare prin inducție 2p

b) Avem $\det A^k = (\det A)^k = \cos^k 2x$. Deci $\sum_{k=1}^n \det A^k = \cos 2x + \cos^2 2x + \dots + \cos^n 2x = S_n$

Rezultă $\sum_{k=1}^n A^k = \begin{pmatrix} \frac{n+S_n}{2} & \frac{n-S_n}{2} \\ \frac{n-S_n}{2} & \frac{n+S_n}{2} \end{pmatrix}$ 1p

Se obține: $\det \left(\sum_{k=1}^n A^k \right) = \frac{(n+S_n)^2}{4} - \frac{(n-S_n)^2}{4} = n \cdot S_n$ 1p



$$\text{Deci } \frac{\sum_{k=1}^n \det A^k}{\det \left(\sum_{k=1}^n A^k \right)} = \frac{S_n}{n \cdot S_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 3.(7p)

a) $a_n > 0$ prin inducție, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n^2 + a_n + 1} > 0$ oricare ar fi n natural, deci $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict crescător.

Dacă $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ar fi mărginit, ar rezulta convergent, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (finit) și, trecând la

limită în relația de recurență $\Rightarrow a = a + \frac{1}{a^2 + a + 1}$; $\frac{1}{a^2 + a + 1} = 0$; a finit (Fals), deci $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict crescător și nemărginit $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 3p

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt[3]{n}} \right)^3 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{1}{a_n^2 + a_n + 1} \right)^3 - a_n^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3a_n^2}{a_n^2 + a_n + 1} + \right. \\ &\left. + \frac{3a_n}{(a_n^2 + a_n + 1)^2} + \frac{1}{(a_n^2 + a_n + 1)^3} \right] = 3. \text{ Cum } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ se obține că } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{3} \dots\dots\dots 4p \end{aligned}$$

Subiectul 4.(7p)

$$-|x^3| \leq f(x) - x \sin x \leq |x^3| \text{ adunăm } x \sin x \text{ și împărțim cu } x^2, \quad x \neq 0 \dots\dots\dots 3p$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} - |x| \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x} + |x| \dots\dots\dots 1p$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} - |x| \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + |x| \right) = 1, \text{ deci } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1 \dots\dots\dots 3p$$

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Clasa a XI-a M₂

Faza locală

17 februarie 2018

Subiectul 1.(7p)

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

- Calculați A^4 ; (4p)
- Determinați $x, y, z \in \mathbb{R}$ dacă se verifică egalitatea

$$xA^2 + yA + zI_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3p)$$

Subiectul 2.(7p)

Într-un reper cartezian se consideră punctele $A_k(k-1, 4k-1), k \in \mathbb{Z}$.

- Scrieți ecuația dreptei A_0A_1 ;
- Determinați $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât aria triunghiului $OA_2A_{k^2}$ să fie egală cu 21.

Subiectul 3.(7p)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}, & x < 0 \\ \sin x + m^2 - m, & x \geq 0 \end{cases}, m \in \mathbb{R}$.

- Aflați valorile parametrului real m astfel încât să existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$;
- Determinați ecuații asimptotei orizontale la graficul funcției spre $-\infty$.

Subiectul 4.(7p)

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 0 \\ x + 3^x, & x \geq 0 \end{cases}, a, b \in \mathbb{R}$.

- Aflați parametrii a, b astfel încât funcția f să fie continuă în $x_0 = 0$ și există $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$;
- Pentru $a = 0, b = 1$ determinați imaginea funcției.

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7p Timp de lucru 3 ore.

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**

Clasa a XI-a M₂

Faza locală

17 februarie 2018

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzător.
- Nu se acorda fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul 1.(7p)

a) Scriem $A = I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Notăm cu $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B^3 = O_3$ 2p

Folosind binomul lui Newton $A^4 = (I_3 + B)^4 = I_3 + 4B + 6B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 36 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2p

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1p

Din egalitatea matriceală se obține sistemul $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x + 2y = 0 \\ 10x + 3y = 4 \end{cases}$ 1p

De unde rezultă $x = 1$; $y = -2$; $z = 1$ 1p

Subiectul 2.(7p)

a) $A_0 A_1: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - 3 - 3x + y = 0 \Rightarrow -4x + y - 3 = 0$ 3p

b) $A_{\Delta O A_2 A_{k^2}} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ k^2 - 1 & 4k^2 - 1 & 1 \end{vmatrix} = 21$ 2p

$\Rightarrow |3k^2 - 6| = 42 \Rightarrow k^2 = 16 \Rightarrow k \in \{-4; 4\}$ 2p

Subiectul 3.(7p)

a) $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \dots\dots\dots 1p$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+4}+2)} = 0 \dots\dots\dots 1p$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\sin x + m^2 - m) = m^2 - m \dots\dots\dots 1p$

Deci $m^2 - m = 0 \Rightarrow m \in \{0; 1\} \dots\dots\dots 1p$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-\frac{2}{x}\right)}{x} = 1 \dots\dots\dots 2p$

$\Rightarrow y = 1$ ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f , spre $-\infty \dots\dots\dots 1p$

Subiectul 4.(7p)

a) $l_s(0) = b; l_d(0) = 1; f(0) = 1 \Rightarrow b = 1 \dots\dots\dots 1p$

$\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} \dots\dots\dots 1p$

$\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{ax+1-1}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x+3^x-1}{x} \Leftrightarrow a = 1 + \ln 3 \dots\dots\dots 1p$

b) $f((-\infty, 0)) = \{1\}; \square(0) = 1; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \dots\dots\dots 2p$

Pe intervalul $[0, +\infty)$, f este strict crescătoare ca sumă de funcții crescătoare $\dots\dots\dots 1p$

Deci $f([0, +\infty)) = [1, +\infty)$, deci $Im f = [1, +\infty) \dots\dots\dots 1p$