

Barem de corectare OLM 2024 Clasa a X-a

P1

a) Pentru $x \geq 3$ se obține $\left \sqrt{2^x - 8} - 3 \right + \left \sqrt{2^x - 8} + 3 \right = 6$	1p
Explicitând modulele se obține că orice $x \in [3, \log_2 17]$ verifică relația dată	2p
b) $x = 32$ este soluție	2p
Cum $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lg(\sqrt{2x} + \sqrt[5]{x})$ este funcție strict crescătoare și $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2 - \log_{2024}(x^2 + 1000)$ este funcție strict descrescătoare, ecuația are soluție unică	2p

P2

Rezolvând ecuația se obțin afixele punctelor A și C , $z_A = 2 + 2i$, respectiv $z_C = -1 - i$	2p
$AC = z_C - z_A = 3\sqrt{2}$, deci $AB = 3$	2p
$ z_B - z_A = z_B - z_C = 3$, $z_B = 2 - i$, $z_D = -1 + 2i$ sau $z_B = -1 + 2i$, $z_D = 2 - i$	3p

P3- adaptare manual

a) Pentru $x \in (1, +\infty)$ funcția este strict crescătoare pentru orice $m \in \mathbb{R}$ și pe $(-\infty, 1]$ funcția este strict crescătoare pentru $m \in (-2, +\infty)$	2p
Cum $\text{Im } f = (-\infty, 2] \cup (m + 2, +\infty)$, funcția este injectivă și nu este surjectivă pentru $m \in (0, +\infty)$	2p
b) Funcția f este surjectivă și nu este injectivă dacă $\text{Im } f = (-\infty, 2] \cup (m + 2, +\infty) = \mathbb{R}$ și $(-\infty, 2] \cap (m + 2, +\infty) \neq \emptyset$, deci $m \in (-\infty, 0)$	3p

P4- GM 11/ 2023

a) $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică cu termeni pozitivi $\Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{(a_1 + a_n)n}{2n} = \frac{(a_1 + a_n)}{2}$	1p
Din inegalitatea mediilor obținem că $\frac{a_1 + a_n}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_n}$,	2p
b) Dacă $(b_n)_{n \geq 1}$ o progresie geometrică cu termeni mai mari ca 1, atunci $(\lg(b_n))_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică cu termeni pozitivi	2p
Din inegalitatea mediilor obținem $\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \geq \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n}$ și prin logaritmare $\lg\left(\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}\right) \geq \frac{\lg b_1 + \lg b_2 + \dots + \lg b_n}{n}$	1p
Din punctul a) rezultă inegalitatea care trebuie demonstrată	1p