

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
18 februarie 2018

CLASA a X-a

1. a) (3p) Arătați că $\log_a \frac{b+c+d}{3} \geq \frac{\log_a b + \log_a c + \log_a d}{3}, \forall a, b, c, d \in (1, +\infty).$

b) (4p) Să se arate că pentru orice numere reale $a, b, c, d > 1$, are loc inegalitatea:

$$\log_a \frac{b+c+d}{3} + \log_b \frac{a+c+d}{3} + \log_c \frac{a+b+d}{3} + \log_d \frac{a+b+c}{3} \geq 4.$$

Precizați când are loc egalitatea.

2. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1 + z_2 + z_3 = -i$.

a) (5p) Arătați că $(z_1 + i)(z_2 + i)(z_3 + i) = 0$.

b) (2p) Calculați suma $S = z_1^{2017} + z_2^{2017} + z_3^{2017}$.

3. (7p) Fie $a, b \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ și funcția injectivă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât funcția $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(\log_a x) + f(\log_b x)$ este funcție constantă. Să se demonstreze că $ab = 1$ și să se arate că există funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care satisfac cerințele enunțului.

4. (7p) Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x^2 f(x) + f(y)) = f(f(x^3)) + y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.