

Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală – Dâmbovița

25 februarie 2023

CLASA A X-A

Subiectul 1. Demonstrați că: $\sqrt[3]{7 - a\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 + a\sqrt{2}} = 2$ dacă și numai dacă $a \in \{-5, 5\}$.

Subiectul 2. Fie $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $\omega^3 = 1$. Demonstrați că:

$$(2 + 5\omega + 2\omega^2)^6 = (2 + 2\omega + 5\omega^2)^6 = 729.$$

Subiectul 3. Fie $a, b, c \in (1, \infty)$. Demonstrați că:

$$\frac{\log_a b}{a+b} + \frac{\log_b c}{b+c} + \frac{\log_c a}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Subiectul 4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că: $f(f(x)) = x + 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
Demonstrați că: a) f este inversabilă; b) dacă în plus $f(0) = 1$, calculați: $f^{-1}(2023)$.

Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect este cotate cu 7 puncte.