OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019
CLASA a XII-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1, autori : Marcel Ţena, Costel Chiteş.

a) Fie $(A,+,\cdot)$ un inel fără divizori ai lui zero şi $M=\{a_1,a_2,...,a_n\}\subseteq A$ care conţine cel puţin un element inversabil diferit de 1, cu proprietatea că este parte stabilă faţă de operaţia „$\cdot$ “.

Să se arate că $a_1+a_2+...+a_n=0$.

b) Daţi un exemplu de astfel de inel $(A,+,\cdot)$.

c) Dacă în ipoteză se pierde integritatea inelului, concluzia rămâne adevărată ?

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Fie $a_k\neq 1$ element inversabil, atunci $M=\{a_k\cdot a_1,a_k\cdot a_2,...,a_k\cdot a_n\}$, justificare.	2p
Scrierea egalităţii $a_1+a_2+...+a_n=a_k\cdot a_1+a_k\cdot a_2+...+a_k\cdot a_n$	2p
Forma echivalentă $(a_k-1)(a_1+a_2+...+a_n)=0$ şi deducerea concluziei.	1p
b) În $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ domeniul de integritate (corp finit) considerăm $M=\{\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6}\}=U(\mathbb{Z}_7)$ ce este grup în raport cu „$\cdot$” avem $\hat{2}\neq\hat{1}$, $\hat{2}$ este inversabil şi $\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}=\hat{0}$	1p
c) Nu rămâne. În inelul neintegru $(\mathbb{Z}_8,+,\cdot)$ considerăm $M=\{\hat{1},\hat{3}\}$ cu $\hat{3}$ element inversabil; dar $\hat{1}+\hat{3}=\hat{4}\neq\hat{0}$.	1p

Enunţ subiect 2, autori : Costel Chiteş, Vlad Florentin Drinceanu.

a) Fie $\cdot$ operaţie algebrică asociativă pe mulţimea nevidă G. Dacă sunt satisfăcute condiţiile : i) există $e_s\in G$ pentru care $e_s\cdot x=x$, *oricare* $x\in G$.

ii) pentru oricare $x\in G$ există $x'\in G$ astfel încât $x'\cdot x=e_s$

se arate că $(G,\cdot)$ este grup.

b) Fie A o mulţime infinită şi notăm $F=\{f\mid f:A\to A\ \textit{funcţie injectivă}\}$.

i) Să se demonstreze că $(F,\circ)$ este monoid.

ii) Explicaţi motivul pentru care $(F,\circ)$ nu este grup.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Există $x'' \in G$ astfel încât $x'' \cdot x' = e_s$; $x \cdot x' = e_s\,(xx') = (x''x')(xx') = x''(x'x)x' = x'' \cdot e_s \cdot x'$ $= x''x' = e_s$; $x \cdot e_s = x(x'x) = (xx')x = e_s x = x$	3p
b) i) $\circ$ a două funcţii injective este injectivă ;	1p
1_A este injectivă	1p
ii) A infinită conţine o submulţime numărabilă $B = \{b_0, b_1, ..., b_n, ...\}$	1p
Funcţia $f : A \to A$, $f(x) = \begin{cases} b_{n+1} & , x = b_n \\ x, & x \in A \setminus B \end{cases}$ este injectivă şi nesurjectivă.	1p

Enunţ subiect 3, autor : Nicolae Bourbăcuț

Fie $\mathcal{F} = \{f : [0,1] \to [0,1] / f\ continu\text{ă}\ \text{ș}i\ f(x) = 1 \Leftrightarrow x = ½\}$.

i) Arătați că $0 < \int_0^1 f(x)dx < 1$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$.

ii) Demonstrați că $sup\left\{\int_0^1 f(x)dx\ /\ f \in \mathcal{F}\right\} = 1$ si $inf\left\{\int_0^1 f(x)dx\ /\ f \in \mathcal{F}\right\} = 0$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
i) Cum $0 \le f(x) \le 1$, f continuă și $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = ½$ implică $(\exists)\ [a,b] \subseteq [0,1]$ astfel încât $f(x) > 0, (\forall)\ x \in [a.b]$. Având in vedere, teorema de medie avem: $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx + \int_b^1 f(x)dx \ge f(c)(b-a) > 0, unde\ c \in (a,b)$ De asemenea, ținând cont că $0 \le f(x) \le 1$, f continuă și $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = ½$, avem $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{½} f(x)dx + \int_{½}^1 f(x)dx = f(c_1) \cdot ½ + \mathrm{f}(c_2)(1 - ½) < 1, unde\ c_1 \in (0, ½)\ \text{ș}i\ c_2 \in (½, 1)$	3p
ii) Conform a), $s = sup\left\{\int_0^1 f(x)dx\ /\ f \in \mathcal{F}\right\} \le 1$ și $i = inf\left\{\int_0^1 f(x)dx\ /\ f \in \mathcal{F}\right\} \ge 0$. Presupunem prin absurd $s < 1$, deci $\int_0^1 f(x)dx \le s, (\forall) f \in \mathcal{F}$ **(1)** Considerăm familia de funcții $f_n : [0,1] \to [0,1], f_n(x) = \begin{cases} \frac{2}{n}x + \frac{n-1}{n}, & x \in [0, ½] \\ -\frac{2}{n}x + \frac{n+1}{n}, & x \in (½, 1] \end{cases}$	2+2p

Evident $f_n \in \mathcal{F}$ și $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{2n-1}{2n}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Cum șirul $\left(\frac{2n-1}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tinde strict crescător la 1, obținem contradicție cu (1). În concluzie $s = 1$. În mod analog, pentru a demonstra $i = 0$, considerăm familia de funcții $f_n: [0,1] \to [0,1], f_n(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [0, 1/2 - 1/n] \cup [1/2 + 1/n, 1] \\ nx + \frac{2-n}{2} & , x \in (1/2 - 1/n, 1/2] \\ -nx + \frac{2+n}{2} & , x \in (1/2, 1/2 + 1/n) \end{cases}$	

Enunţ subiect 4, autor Florin Rotaru, G.M.1/2018

Fie $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu $\int_0^1 f(x)dx = \frac{2^{2018}-1}{2018}$. Să se arate că există $a \in [0,1]$ cu $f(a) = (a+1)^{2017}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Definim funcţia $g:[0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - (x+1)^{2017}$, $\forall x \in [0,1]$; g este continuă.	2
Atunci $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx - \frac{(x+1)^{2018}}{2018}\Big\|_0^1 = 0$	2
Conform Teoremei de medie, există $a \in [0,1]$ a.i. $g(a) = 0$, deci $f(a) = (a+1)^{2017}$	3