

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 25.02.2023–

CLASA A IX-A

Subiecte

1. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 2$ și $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Arătați că :

a) $x_n = n(n+1), \forall n \in \mathbb{N}^*$

b) $\{\sqrt{x_n}\} < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Prof. Roxana Soare , Ploiești

2. Fie $x, y, z > 0$ cu $x + y + z = 9$. Demonstrați că :

$$\frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{3y} + \sqrt{5z}} + \frac{y}{\sqrt{y} + \sqrt{3z} + \sqrt{5x}} + \frac{z}{\sqrt{z} + \sqrt{3x} + \sqrt{5y}} \geq 1$$

Prof. Vasile Coman, Valenii de Munte

3. Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N, P, Q, R astfel încât M este mijlocul lui $[BC]$, $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PC}$, Q = mijlocul lui $[AM]$, R = mijlocul lui $[BQ]$.

a) Demonstrați că $RP \parallel BC$;b) Demonstrați că RP, AM și CN sunt concurente .

Prof. Claudiu Militaru , Ploiești

4. Fie ecuația $\left[\frac{25x}{4}\right] + \left[\frac{5x}{2}\right] + [x] + \left[\frac{2x}{5}\right] + \left[\frac{4x}{25}\right] + [-10, 31x] = 0$. (S-a notat cu $[x]$ partea

întreagă a lui x). Arătați că ecuația are cel puțin un milion de soluții în intervalul $(1; 1,01^{10^{10}})$.

Prof. Emil Vasile , Ploiești

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.