

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024  
Clasa a XI-a

1. (7p) Se consideră determinantul de ordinul 3,  $D(n) = \begin{vmatrix} n^2 + 1 & n^4 + 1 & 17 \\ n^2 + n & n^4 + n^2 & 20 \\ n^2 & n^4 & 16 \end{vmatrix}$ . Arătați că pentru orice  $n$  întreg și par,  $D(n)$  este divizibil cu 384.
2. Determinați valoarea limitelor:
  - a. (3p)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$
  - b. (4p)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{n!x^n - \sin x \cdot \sin 2x \cdot \dots \cdot \sin nx}{x^{n+2}}$
3. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z})$ .
  - a) (4p) Arătați că  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , există șirurile  $(a_n)_{n \geq 1}$  și  $(b_n)_{n \geq 1}$  astfel încât  $A^n = a_n \cdot A + b_n \cdot I_3$ .
  - b) (3p) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ .
4. Notăția  $\{x\}$  reprezintă partea fracționară a numărului real  $x$ .
  - a) (4p) Arătați că dacă  $(a_n)_{n \geq 1}$  este un șir convergent, cu limita  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \{a\}$ .
  - b) (3p) Ce puteți afirma despre limita șirului  $(\{a_n\})_{n \geq 1}$ , dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{Z}$ ?

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.  
Timp efectiv de lucru: 3 ore.