



Soluții și bareme de corectare orientative
Clasa a XII-a

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) Funcția $(x, y) \rightarrow x * y$ definește o lege de compoziție pe M dacă
($\forall$) $x, y \in M \Rightarrow x * y \in M$.

Fie $x, y \in (-\infty, 1)$, condiția $x * y \in (-\infty, 1)$ se scrie $\frac{2024-xy}{2025-x-y} < 1$. Deoarece
 $x + y < 2 < 2025, (\forall) x, y \in (-\infty, 1) \Rightarrow 2025 - x - y > 0$, (2p)

$$\frac{2024 - xy}{2025 - x - y} < 1 \Leftrightarrow 2024 - xy < 2025 - x - y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - x - y + xy = (x - 1)(y - 1) > 0, (\forall) x, y \in (-\infty, 1). \quad (1p)$$

b) Legea de compoziție “*” este comutativă, dacă: $(\forall) x, y \in M \Rightarrow x * y = y * x$.
 $x * y = \frac{2024-xy}{2025-x-y} = \frac{2024-yx}{2025-y-x} = y * x, (\forall) x, y \in (-\infty, 1).$ (1p)

Legea de compoziție “*” este asociativă, dacă:

$$(\forall) x, y, z \in M \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z).$$

$$(x * y) * z = x * (y * z) = \frac{2024 \cdot 2025 - 2024 \cdot (x+y+z) + xyz}{2025^2 - 2024 - 2025 \cdot (x+y+z) + xy + yz + zx}. \quad (1p)$$

Legea de compoziție “*” are element neutru, dacă:

$$(\exists) e \in M \text{ astfel încât } e * x = x * e = x, (\forall) x \in M.$$

Legea de compoziție “*” este comutativă, deci este suficient să stabilim dacă
 $(\exists) e \in M$ astfel încât $x * e = x, (\forall) x \in M$. Presupunem că există $e \in (-\infty, 1)$ astfel încât
 $x * e = x, (\forall) x \in (-\infty, 1)$. Din $x * e = x \Rightarrow \frac{2024-xe}{2025-x-e} = x \Leftrightarrow x^2 - 2025 \cdot x + 2024 = 0$,
dar $x^2 - 2025 \cdot x + 2024 \neq 0, (\forall) x \in (-\infty, 1) \Rightarrow$ legea de compoziție “*” nu are
element neutru. (2p)

2. Presupunem că $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow (\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = (F(x) + C)' \Leftrightarrow \frac{\sin 7x}{\sin x} = \left(x + \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{3} \sin 6x + C \right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 7x}{\sin x} = 1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x \Leftrightarrow \quad (3p)$$

$$\Leftrightarrow \sin 7x = \sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos 2x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos 4x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos 6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 7x = \sin x + (\sin 3x - \sin x) + (\sin 5x - \sin 3x) + (\sin 7x - \sin 5x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 7x = \sin 7x.$$

$$\text{În concluzie } \int f(x)dx = F(x) + C. \quad (4p)$$

3. a) $\text{ord}(a) = n \Rightarrow a^n = e.$ (1p)

$$h(a) = f(a) \cdot f(a^2) \cdot \dots \cdot f(a^{n-1}) \cdot f(a^n) = f(a) \cdot f(a^2) \cdot \dots \cdot f(a^{n-1}) \cdot f(e).$$

$$h(e) = f(e) \cdot f(a) \cdot f(a^2) \cdot \dots \cdot f(a^{n-1}) \Rightarrow h(e) = h(a), \text{ dar } a \neq e \Rightarrow \text{nu este injectivă.}$$

(2 p)



- b) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x+y) = f(x) + f(y), (\forall) x, y \in \mathbb{Z}, f$ bijectivă.
Pentru $x = y = 0$ se obține $f(0) = 0$. Pentru $y = -x$ se obține
 $f(-x) = -f(x), (\forall) x \in \mathbb{Z}$. **(1p)**
Prin inducție se arată că $f(n) = nf(1), (\forall) n \in \mathbb{N}$ și cu **(1)** se deduce
 $f(n) = nf(1), (\forall) n \in \mathbb{Z}$. **(2p)**
Din f bijectivă $\Rightarrow (\exists) a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $1 = f(a) = af(1) \Rightarrow f(1) \in \{\pm 1\} \Rightarrow f(n) = n$
și $f(n) = -n$. Ambele funcții satisfac ipotezele problemei. **(1p)**

4. a) Derivând relația din enunț se obține:
 $f(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) + 2025 \cdot f'(x) + 1, (\forall) x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ **(1 p)**
 $\Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)-1}{2 \cdot f(x)+2025} > 0, (\forall) x \in \mathbb{R}, (*)$ deoarece $f(x) > 1, (\forall) x \in \mathbb{R}$. **(1 p)**
Cum $f'(x) > 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$, rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. **(1 p)**

- b) Din relația $(*)$ deducem că f' este derivabilă pe $\mathbb{R}$. Derivând în această relație:
 $f''(x) = \frac{f'(x) \cdot (2 \cdot f(x) + 2025) - 2 \cdot f'(x) \cdot (f(x) - 1)}{(2 \cdot f(x) + 2025)^2} =$
 $= 2027 \cdot \frac{f'(x)}{(2 \cdot f(x) + 2025)^2} > 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$, adică f este convexă. **(1 p)**

- Arătăm că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.
Fie $a \in \mathbb{R}$. Din f convexă deducem: $f(x) \geq f(a) + (x-a) \cdot f'(a), (\forall) x \geq a$ (**).
Cum $f'(a) > 0$ obținem trecând la limită în relația (**):
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} (f(a) + (x-a) \cdot f'(a)) = \infty$. **(1 p)**

Pentru calculul limitei din enunț vom folosi regula lui ***Hospital*** pentru cazul de nedeterminare $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + x \cdot f'(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-1}{2 \cdot f(x)+2025} \stackrel{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{f(x)}}{2 + 2025 \cdot \frac{1}{f(x)}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1. \end{aligned} \quad \textbf{(2 p)}$$