
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 8 februarie 2020

Clasa a X-a

1. Să se rezolve ecuația: $\sqrt{1-x^2} = 3x - 4x^3$.

2. (a) Determinați numărul real m pentru care punctele A, B, C având afixele

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 4 \cdot i, \quad z_3 = -1 + m \cdot i \text{ sunt puncte coliniare. } (i^2 = -1).$$

(b) Arătați că, dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, atunci $|z| = 1$ dacă și numai dacă există un număr real a

$$\text{astfel încât } z = \frac{1+ai}{1-ai}.$$

3. Arătați că:

$$\frac{1}{\log_{a_1} a_2} + \frac{1}{\log_{a_2} a_3} + \dots + \frac{1}{\log_{a_n} a_1} \geq n, (\forall) a_1, a_2, \dots, a_n \in (1, \infty)$$

4. Se consideră mulțimea M a funcțiilor injective $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x) \cdot f(1-x) = f(ax+b), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ unde } a \text{ și } b \text{ sunt numere reale. Arătați că:}$$

(a) $a = 0$;

(b) $f(1-b) = 1$;

(c) f nu este surjectivă;

(d) $M \neq \emptyset$.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.