



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ Etapa locală , SĂLAJ , 11.02.2023

Clasa a VII-a

1. Tétel

(2p) a) Igazold, hogy $\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}, \forall n, k \in \mathbb{N}$.

(5p) b) Adottak az $a = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{4}{8 \cdot 12} + \frac{5}{12 \cdot 17} + \frac{6}{17 \cdot 23} + \frac{7}{23 \cdot 30}$ és
 $b = 3 + 8 + 13 + \dots + 10018$.

Számítsd ki $\sqrt{15 \cdot a + \frac{b}{1002}}$ szám egész részét.

2. Tétel

(3p) a) Számítsátok ki a következő számok mértani közepét:

$$a = |\sqrt{7} - 3| + \frac{2}{3 - \sqrt{7}} + 12 \text{ și } b = |2 - \sqrt{5}| - \frac{4}{3 - \sqrt{5}} + 13$$

(4p) b) Felhasználva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget, igazold:

$$\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \dots + \frac{\sqrt{4046 \cdot 4047}}{8093} < 2023.$$

3. Tétel

Legyen $ABCD$ paralelogramma, $M \in (AB)$, $N \in (CD)$ úgy, hogy $[AM] \equiv [NC]$ és O a paralelogramma középpontja.

(3p) a) Igazold, hogy M, O, N pontok kollineárisak.

(4p) b) Ha az $ABCD$ paralelogramma területe 24 cm^2 és $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$, számítsátok ki NOC háromszög területét.

4. Tétel

Adott ABC háromszög, $\sphericalangle ACB = 100^\circ$, $\sphericalangle CAB = 50^\circ$, felvesszük a D pontot a háromszög belső tartományában úgy, hogy $DA = DB$ și $\sphericalangle DBC = 20^\circ$. Igazold, hogy a D pont az ABC háromszög köré írt kör középpontjának az AB szerinti szimmetrikusa és számítsd ki $\sphericalangle DCB$ szög mértékét.

Munkaidő: 3 óra.

Minden tétel 7 pontot ér..