



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 21.02.2016

CLASA A IX-A

SUBIECTUL I (7p)

Fie n un număr natural compus și $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ divizorii săi naturali, $k \geq 3$. Să se arate că $d_1, d_2, \dots, d_k$ nu sunt în progresie aritmetică.

Gazeta Matematică

SUBIECTUL II (7p)

(2p) a) Determinați $\left[\sqrt{4n^2 - 2n} \right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(5p) b) Arătați că $\left[\frac{n}{\sum_{k=1}^n \{\sqrt{4k^2 - 2k}\}} \right] = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

($[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x).

SUBIECTUL III (7p)

Dacă $x, y, z \in (0, \infty)$, demonstrați că:

$$\frac{xy}{xy + x + y} + \frac{yz}{yz + y + z} + \frac{zx}{zx + z + x} \leq \frac{6 + x^2 + y^2 + z^2}{9}.$$

SUBIECTUL IV (7p)

În triunghiul ABC se consideră M mijlocul lui $[BC]$ și $G \in (AM)$ astfel încât $\frac{AG}{AM} = k$. Paralela prin G la BC intersectează AB în D și AC în E . Fie $BG \cap CD = \{Q\}$ și $CG \cap BE = \{P\}$.

(2p) a) Arătați că $\frac{GQ}{QB} = \frac{k}{2}$;

(3p) b) Exprimați vectorul $\overrightarrow{GQ}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ și scalarul k ;

(2p) c) Demonstrați că, dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC , atunci

$$\Delta MPQ \sim \Delta ABC.$$

NOTĂ :

Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.