

Barem de corectare OLM Clasa a XI-a, 2014

$$1. D = \begin{vmatrix} e^{2x^2} & e^2 & e^{-x} \\ e^2 & e^{2x} & e^{-x^2} \\ e^{-x} & e^{-x^2} & e^{-4} \end{vmatrix} = \left(e^{x^2+x-2} \right)^2 + \frac{2}{e^{x^2+x-2}} - 3 \dots\dots\dots (2p)$$

Notăm $e^{x^2+x-2} = t, \quad t > 0 \dots\dots\dots (1p)$

$$D = \frac{(t-1)^2(t+2)}{t} \leq 0 \Leftrightarrow t = 1 \dots\dots\dots (2p)$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x \in \{1, -2\} \dots\dots\dots (2p)$$

2. a) $x_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 \dots\dots\dots (1p)$

$$x_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \dots\dots\dots (1p)$$

$$x_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2 \sin 2x)}{x} = 2^2 \dots\dots\dots (1p)$$

b) Demonstrația prin inducție că $x_n = 2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots (2p)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + 2^{n-1}}{2^n} = 1 \dots\dots\dots (2p)$$

3. a) Fie $l \in \bar{\mathbb{R}}$ limita șirului $(a_n)_{n \geq 0}$. Cum $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ sunt două subșiruri ale lui $(a_n)_{n \geq 0}$, ele vor avea aceeași limită $l \dots\dots\dots (2p)$

b) Enunțul reciprocei este:

”Dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ au limită, atunci șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ are limită.” $\dots\dots\dots (1p)$

Căutăm un contraexemplu care să dovedească faptul că reciproca este falsă. $\dots\dots\dots (1p)$

$$a_n = (-1)^n \text{ este divergent fără limită.} \dots\dots\dots (1p)$$

$$x_n = \min \{(-1)^n, (-1)^{n+1}\} = -1 \text{ are limită.} \dots\dots\dots (1p)$$

$$y_n = \max \{(-1)^n, (-1)^{n+1}\} = 1 \text{ are limită.} \dots\dots\dots (1p)$$

4. a) $X(z) \cdot X(\bar{z}) = I_2 \left(1 - |z|^2 \cdot \det A \right) + A \left(z + \bar{z} + |z|^2 \cdot \operatorname{tr}(A) \right)$

Deci $n = 1 - |z|^2 \cdot \det A, \quad m = z + \bar{z} + |z|^2 \cdot \operatorname{tr}(A) \dots\dots\dots (3p)$

b) $|z| = 1 \Rightarrow z + \bar{z} = 2 \cos \alpha \in [-2, 2] \dots\dots\dots (1p)$

$$\operatorname{tr}[X(z) \cdot X(\bar{z})] = \operatorname{tr}(mA + nI_2) = a^2 + d^2 + 2(\cos \alpha)(a + d) + 2 + 2bc \dots\dots\dots (1p)$$

$$\operatorname{tr}(A \pm I_2)^2 = a^2 + d^2 \pm 2(a + d) + 2 + 2bc \dots\dots\dots (1p)$$

Inegalitatea cerută este adevărată. $\dots\dots\dots (1p)$