

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
10.02.2024**

CLASA a X -a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Demonstrați că $\sqrt[3]{7-a\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7+a\sqrt{2}} = 2$ dacă și numai dacă $a \in \{-5, 5\}$.

Soluție:

„ $\Rightarrow$ ”

Ridicăm la puterea a treia egalitatea $\sqrt[3]{7-a\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7+a\sqrt{2}} = 2$ și obținem

$$14 + 3\sqrt[3]{49 - 2a^2} \left(\sqrt[3]{7 - a\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 + a\sqrt{2}} \right) = 8 \Leftrightarrow 14 + 6\sqrt[3]{49 - 2a^2} = 8.$$

Avem $6\sqrt[3]{49 - 2a^2} = -6$, de unde $a \in \{-5, 5\}$.

„ $\Leftarrow$ ”

Dacă $a \in \{-5, 5\}$ notăm $x = \sqrt[3]{7-a\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7+a\sqrt{2}}$. Ridicăm la puterea a treia egalitatea și obținem $x^3 = 14 - 3x \Leftrightarrow x^3 + 3x - 14 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 7) = 0$.

Cum ecuația $x^2 + 2x + 7 = 0$ nu are soluții reale, obținem $x = 2$, deci $\sqrt[3]{7-a\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7+a\sqrt{2}} = 2$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Ridică corect la puterea a treia egalitatea din enunț și obține $14 + 6\sqrt[3]{49 - 2a^2} = 8$	1p
Rezolvă ecuația și obține $a \in \{-5, 5\}$	2p
Dacă $a \in \{-5, 5\}$ notează $x = \sqrt[3]{7-a\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7+a\sqrt{2}}$	1p
Ridică la puterea a treia și obține ecuația $x^3 + 3x - 14 = 0$	1p
Rezolvă ecuația și arată că $x = 2$ este soluție unică	2p

2. Să se demonstreze inegalitățile:

a) $\log_x \left(\frac{2xy}{x+y} \right) + \log_y \left(\frac{2xy}{x+y} \right) \geq 2, x, y \in (0,1).$

b) $\frac{\log_x y}{x+y} + \frac{\log_y z}{y+z} + \frac{\log_z x}{z+x} \geq \frac{9}{2(x+y+z)}, \text{ unde } x, y, z \in (0,1) \text{ sau } x, y, z \in (1, \infty).$

Soluție:

a) Folosind inegalitatea mediilor avem $\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy}$. Cum $x, y \in (0,1)$ avem că

$$\log_x \left(\frac{2xy}{x+y} \right) \geq \log_x (\sqrt{xy}) \text{ și } \log_y \left(\frac{2xy}{x+y} \right) \geq \log_y (\sqrt{xy}). \text{ Adunând cele două relații}$$

obținem

$$\log_x \left(\frac{2xy}{x+y} \right) + \log_y \left(\frac{2xy}{x+y} \right) \geq \log_x (\sqrt{xy}) + \log_y (\sqrt{xy}) = \frac{1}{2} (2 + \log_x y + \log_y x).$$

Cum $x, y \in (0,1)$, $\log_x y > 0$ și $\log_y x > 0$. Aplicând inegalitatea mediilor pentru $\log_x y$ și

$$\log_y x \text{ avem } \log_x y + \log_y x \geq 2\sqrt{\log_x y \cdot \log_y x} = 2.$$

$$\text{Deci } \log_x \left(\frac{2xy}{x+y} \right) + \log_y \left(\frac{2xy}{x+y} \right) \geq \frac{1}{2} (2 + 2) = 2, \text{ pentru orice } x, y \in (0,1).$$

b) Dacă $x, y, z \in (0,1)$ sau $x, y, z \in (1, \infty)$ atunci $\log_x y > 0$, $\log_y z > 0$ și $\log_z x > 0$. Aplicăm

inegalitatea mediilor pentru $\frac{\log_x y}{x+y}$, $\frac{\log_y z}{y+z}$ și $\frac{\log_z x}{z+x}$ și obținem

$$\frac{\log_x y}{x+y} + \frac{\log_y z}{y+z} + \frac{\log_z x}{z+x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\log_x y}{x+y} \cdot \frac{\log_y z}{y+z} \cdot \frac{\log_z x}{z+x}}.$$

$$\text{Dar } \log_x y \cdot \log_y z \cdot \log_z x = 1, \text{ deci } \frac{\log_x y}{x+y} + \frac{\log_y z}{y+z} + \frac{\log_z x}{z+x} \geq 3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x+y) \cdot (y+z) \cdot (z+x)}}.$$

Aplicând inegalitatea mediilor pentru $x+y$, $y+z$ și $z+x$, avem

$$\sqrt[3]{(x+y) \cdot (y+z) \cdot (z+x)} \leq \frac{2(x+y+z)}{3}, \text{ de unde obținem}$$

$$\frac{\log_x y}{x+y} + \frac{\log_y z}{y+z} + \frac{\log_z x}{z+x} \geq \frac{9}{2(x+y+z)}$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Aplică inegalitatea mediilor $\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy}$	1p
Arată că $\log_x \left(\frac{2xy}{x+y} \right) + \log_y \left(\frac{2xy}{x+y} \right) \geq \frac{1}{2} (2 + \log_x y + \log_y x)$	1p
Aplică inegalitatea mediilor pentru $\log_x y$ și $\log_y x$ și finalizează	1p
b) Arată că $\frac{\log_x y}{x+y} + \frac{\log_y z}{y+z} + \frac{\log_z x}{z+x} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{\log_x y}{x+y} \cdot \frac{\log_y z}{y+z} \cdot \frac{\log_z x}{z+x}}$	1p
Arată că $\frac{\log_x y}{x+y} + \frac{\log_y z}{y+z} + \frac{\log_z x}{z+x} \geq 3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x+y) \cdot (y+z) \cdot (z+x)}}$	1p
Arată că $\sqrt[3]{(x+y) \cdot (y+z) \cdot (z+x)} \leq \frac{2(x+y+z)}{3}$	1p
Finalizează	1p

3. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$. Determinați valoarea maximă a

expresiei $E = \left| \frac{z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_3} + \frac{3z_3}{z_1} \right|$.

Soluție:

Cum $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ avem că $z_i = \frac{1}{z_i}, i = \overline{1, 3}$, Conjugând relația

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1 \text{ obținem } \overline{\frac{z_1}{z_2}} + \overline{\frac{z_2}{z_3}} + \overline{\frac{z_3}{z_1}} = 1, \text{ de unde } \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} = 1. \text{ Prin urmare}$$

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} \Leftrightarrow z_1^2 z_3 + z_2^2 z_1 + z_3^2 z_2 = z_2^2 z_3 + z_3^2 z_1 + z_1^2 z_2$$

$$\Leftrightarrow z_1^2 z_3 + z_2^2 z_1 + z_3^2 z_2 - z_2^2 z_3 - z_3^2 z_1 - z_1^2 z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1^2 (z_3 - z_2) - z_1 (z_3^2 - z_2^2) + z_2 z_3 (z_3 - z_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z_3 - z_2)(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) = 0$$

- I. Dacă $z_3 - z_2 = 0 \Rightarrow z_3 = z_2$, atunci $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$ devine $z_1^2 + z_2^2 = 0$, deci $z_2 = iz_1$ sau

$$z_2 = -iz_1.$$

$$\text{Dacă } z_2 = iz_1 \text{ atunci } E = \left| \frac{1}{i} + 2 + 3i \right| = \sqrt{8}.$$

$$\text{Dacă } z_2 = -iz_1 \text{ atunci } E = \left| -\frac{1}{i} + 2 - 3i \right| = \sqrt{8}.$$

- II. Dacă $z_1 - z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = z_2$, atunci $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$ devine $z_3^2 + z_2^2 = 0$, deci $z_3 = iz_2$ sau

$$z_3 = -iz_2.$$

$$\text{Dacă } z_3 = iz_2 \text{ atunci } E = \left| 1 + \frac{2}{i} + 3i \right| = \sqrt{2}.$$

$$\text{Dacă } z_3 = -iz_2 \text{ atunci } E = \left| 1 - 2\frac{1}{i} - 3i \right| = \sqrt{2}.$$

- III. Dacă $z_1 - z_3 = 0 \Rightarrow z_1 = z_3$, atunci $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$ devine $z_1^2 + z_2^2 = 0$, deci $z_2 = iz_1$ sau

$$z_2 = -iz_1.$$

Dacă $z_2 = iz_1$ atunci $E = \left| \frac{1}{i} + 2i + 3 \right| = \sqrt{10}$.

Dacă $z_3 = -iz_2$ atunci $E = \left| -\frac{1}{i} - 2i + 3 \right| = \sqrt{10}$

Prin urmare, valoarea maximă a lui E este $\sqrt{10}$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Arată că $z_i = \frac{1}{z_i}, i = \overline{1, 3}$	1p
Arată că $z_1^2 z_3 + z_2^2 z_1 + z_3^2 z_2 = z_2^2 z_3 + z_3^2 z_1 + z_1^2 z_2$	1p
Arată că $(z_3 - z_2)(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) = 0$	1p
Studiază cazul $z_3 - z_2 = 0$ și găsește $E = \sqrt{8}$	1p
Studiază cazul $z_1 - z_2 = 0$ și găsește $E = \sqrt{2}$	1p
Studiază cazul $z_1 - z_3 = 0$ și găsește $E = \sqrt{10}$	1p
Finalizează	1p

4. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f\left(x + f\left((1+x)y\right)\right) = (1+y)f(x) + 1$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Soluție:

Luăm $x = 0$ în relația din enunț și obținem $f(f(y)) = (1+y)f(0) + 1$ pentru orice $y \in \mathbb{R}$.

Dacă $f(0) = 0$ atunci relația de mai sus devine $f(f(y)) = 1$, pentru orice $y \in \mathbb{R}$. Atunci pentru $y = 0$ avem $1 = f(f(0)) = f(0) = 0$, contradicție. Prin urmare $f(0) \neq 0$.

Demonstrăm acum că funcția f este injectivă. Fie $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(y_1) = f(y_2)$. Cum

$$f(f(y_1)) = (1+y_1)f(0) + 1 \text{ și } f(f(y_2)) = (1+y_2)f(0) + 1 \text{ avem că}$$

$$(1+y_1)f(0) = (1+y_2)f(0), \text{ deci } (y_1 - y_2)f(0) = 0.$$

Cum $f(0) \neq 0 \Rightarrow y_1 = y_2$ și prin urmare f este o funcție injectivă.

Luăm $x = -1$ în identitatea din enunț și obținem $f(-1 + f(0)) = (1+y)f(-1) + 1$, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, deci $f(-1) = 0$.

Cum f este o injectivă avem $f(x) \neq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Luăm $y = -\frac{1}{f(x)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ în identitatea din enunț. Obținem

$$f\left(x + f\left(-\frac{1+x}{f(x)}\right)\right) = \left(1 - \frac{1}{f(x)}\right)f(x) + 1 \Rightarrow f\left(x + f\left(-\frac{1+x}{f(x)}\right)\right) = f(x).$$

Cum f este o injectivă avem $x + f\left(-\frac{1+x}{f(x)}\right) = x \Rightarrow f\left(-\frac{1+x}{f(x)}\right) = 0$.

Dar $f(-1) = 0$ și f este o injectivă, deci $-\frac{1+x}{f(x)} = -1 \Rightarrow f(x) = 1+x$, pentru orice

$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Cum $f(-1) = 0$ avem $f(x) = 1+x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Se verifică prin calcul direct că funcția f găsită satisface identitatea din enunț.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Pune $x = 0$ în relația din enunț și obține $f(f(y)) = (1+y)f(0)+1$ pentru orice $y \in \mathbb{R}$.	1p
Demonstrează că $f(0) \neq 0$	1p
Demonstrează că funcția f este injectivă	1p
Arată că $f(-1) = 0$.	1p
Consider $y = -\frac{1}{f(x)}$ în relația din enunț și obține $f\left(-\frac{1+x}{f(x)}\right) = 0$	1p
Demonstrează că $f(x) = 1+x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.	1p
Verifică că funcția găsită satisface identitatea din enunț	1p