

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
9 FEBRUARIE 2013

CLASA a VIII-a
Bareme

Subiectul 1.

Fie numerele reale a, b, x, y ce verifică relațiile $x + y = a + b$ și $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.
Arătați că $x^{2013} + y^{2013} = a^{2013} + b^{2013}$.

Barem:

Ridicând prima relație la pătrat și combinând cu a doua obținem $2xy = 2ab$	...2p
Combinând această relație cu a doua din ipoteză obținem $(x - y)^2 = (a - b)^2$	...1p
Obținem astfel $ x - y = a - b $, deci $x - y = \pm(a - b)$	...1p
În unul din cazuri obținem (combinând cu prima relație) $x = a$ și $y = b$	...1p
În celălalt caz $x = b$ și $y = a$	...1p
Concluzia	...1p

Subiectul 2.

Se consideră $E(m; n) = \sqrt{3 \cdot 5^m + 25^n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}$.

- a) Să se arate că $E(2013; 1006) \in \mathbb{Q}$ și $E(1006; 2013) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- b) Arătați că există o infinitate de perechi $(m; n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ astfel încât $E(m; n) \in \mathbb{Q}$.
- c) Arătați că există o infinitate de perechi $(m; n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ astfel încât $E(m; n) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Barem:

- a) $E(2013; 1006) = \sqrt{3 \cdot 5^{2013} + 25^{1006}} = \sqrt{5^{2012} (3 \cdot 5 + 1)} = \sqrt{16 \cdot 5^{2012}} = 4 \cdot 5^{1006} \in \mathbb{Q}$1p
 $E(1006; 2013) = \sqrt{3 \cdot 5^{1006} + 25^{2013}} = \sqrt{5^{1006} (3 + 5^{3020})} = 5^{503} \sqrt{3 + 5^{3020}}$
 $U(3 + 5^{3020}) = 8 \Rightarrow 3 + 5^{3020}$ nu este pătrat perfect deci $E(1006; 2013) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$...2p
- b) Considerând $m = 2n + 1$ obținem
 $E(m; n) = \sqrt{3 \cdot 5^{2n+1} + 5^{2n}} = \sqrt{5^{2n} (3 \cdot 5 + 1)} = 5^n \cdot 4 \in \mathbb{Q}$.
Există o infinitate de perechi $(m; n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, cu $m = 2n + 1$...2p

- c) Fie $m = 2k < 2n, k \in \mathbf{N}$ și obținem $E(m; n) = \sqrt{5^{2k} (3 + 5^{2n-2k})} = 5^k \sqrt{3 + 5^{2n-2k}}$
 $U(3 + 5^{2n-2k}) = 8 \Rightarrow 3 + 5^{2n-2k}$ nu este pătrat perfect.
 Există o infinitate de perechi $(m; n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, cu $m = 2k < 2n, k \in \mathbf{N}$...2p

Subiectul 3.

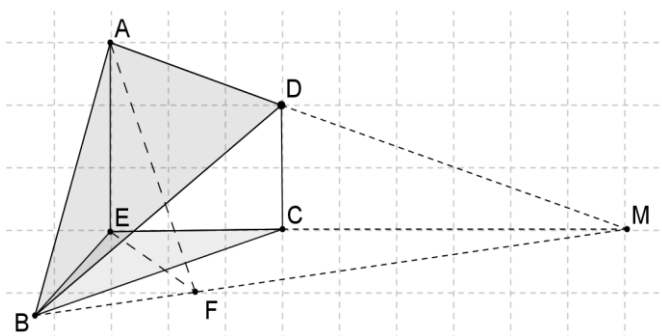
Fie trapezul isoscel ABCD, $AB \parallel CD$, $AB = 12$ cm, $CD = 6$ cm, $m(\angle A) = 60^\circ$ și înălțimea CE, $E \in AB$. Îndoim trapezul după CE, astfel încât planul (ACD) devine perpendicular pe planul (BEC). Determinați tangenta unghiului format de planele (ABD) și (EBC).

Barem:

Găsirea dreptei de intersecție BM ... 2p.

Construirea unghiului plan asociat diedrului: AFE ... 2p.

Calculul tangentei unghiului ... 3p.



Subiectul 4.

Putem așeza numerele 6, 19, 21, 27, 34, 43, 59 și 76 în vârfurile unui cub astfel încât fiecare sumă obținută prin adunarea numerelor situate la capătul unei laturi a cubului să fie un număr divizibil cu 5? Justificați.

Barem:

Fiecare vârf este legat de alte 3 vârfuri, deci pentru oricare dintre numerele din șir trebuie să găsim alte 3 numere astfel încât sumele obținute să fie divizibile cu 5. ...3p

Pentru 27 doar numărul 43 este convenabil. 3p.

Concluzie: nu putem așeza 1p.

Obs. O demonstrație mai generală se referă la faptul că din cele 8 numere 4 trebuie să fie de forma $5k+1$ și 4 de forma $5k+4$ sau 4 trebuie să fie de forma $5k+2$ și 4 de forma $5k+3$ (sau toate divizibile cu 5).

Obs. O demonstrație care face referire la faptul că suma celor 8 numere este un număr divizibil cu 5, deci s-ar putea așeza cele 8 numere în vârfurile cubului nu se punctează.

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.