



INSPECTORATUL
ȘCOLAR
JUDEȚEAN
SATU MARE



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Olimpiada națională de matematică

etapa locală

28.02.2015

Clasa a XII-a

1. Să se arate că monoizii $(N^*, \cdot)$ și $(Z^*, \cdot)$ nu sunt izomorfi.

Pop Ovidiu – Colegiul Național „Mihai Eminescu”

2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție bijectivă cu $f(1) = k$, $k \in \mathbb{R}$. Pe $\mathbb{R}^2$ se definește legea de compoziție $x * y = f^{-1}[f(x) + f(y) - k]$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că $(\mathbb{R}, *)$ este grup comutativ.

3. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} \cos x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\int \det^2(A - B)dx$, unde $x \in \mathbb{R}$.

4. Să se determine funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă pe $\mathbb{R}$, g derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$, $f(0) = g(0) = 2015$, $f \in \int g'(x)dx$ și $g \in \int f(x)dx$.

Pop Ovidiu – Colegiul Național „Mihai Eminescu”

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

SUCCES!



Barem de corectare

1.	Reducere la absurd: $(\exists)f: N^* \rightarrow Z^*$ bijectiv[, $f(x, y) = f(x)f(y)$	1 p
	$f(1) = 1$	1 p
	$f(p) = a$, p = număr prim, a = număr prim	2 p
	$p \in Z$ prim $\Rightarrow (\exists)p_1, p_2 \in N$, prim, astfel încât $f(p_1) = p, f(p_2) = -p$	2 p
	Contradicția $p_1 = p_2$ și $p_1 \neq p_2$	1 p
TOTAL Subiectul 1		7 p
2.	asociativitatea	2p
	comutativitatea	1p
	element neutru $e = 1$	2p
	elemente simetrizabile	2p
TOTAL Subiectul 2		7 p
3.	$\det^2(A - B) = (1 - \cos x)^2 \sin^2 x$	1p
	$\int \det^2(A - B)dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{16}(2x - \sin 2x \cos 2x) + C$	6p
	TOTAL Subiectul 3	7 p
4.	$f'(x) = g'(x)$ și $g'(x) = f(x) \Rightarrow f'(x) = f(x), (\forall)x \in R$	2p
	$f(x) = ce^x$	2p
	$c = 2015$	1p
	$g(x) = 2015 \cdot e^x + a$	1p
TOTAL Subiectul 4		7 p

Subiecte propuse de prof.dr. Doina Muntean – ISJ și prof.dr. Ovidiu Pop – Colegiul Național „Mihai Eminescu” Satu Mare