

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Locală, județul Timiș
23.02.2018

Clasa a XI-a

1. Fie $X = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ unde $a, b, \alpha \in \mathbf{R}$, $a^2 + b^2 < 1$.

a) Calculați X^n , pentru $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

b) Demonstrați că A^n este de forma $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

c) Demonstrați că șirurile $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sunt convergente și au limita 0.

2. Rezolvați în $M_2(\mathbf{R})$ ecuația $X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$.

(G.M. nr 12 / 2017)

3. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ astfel încât $x_1 \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ și $x_{n+1} = x_n - 3x_n^2$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Arătați că :

a) șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este convergent la zero.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \frac{1}{3}$.

4. a) Utilizând eventual identitatea $\sin x = \sin \frac{x}{3} \left(3 - 4 \sin^2 \frac{x}{3}\right)$, arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$.

b) Dacă $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n!x^n - \sin x \sin 2x \dots \sin nx}{x^{n+2}}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, arătați că $L_n = n! \cdot \frac{n^2}{6} + nL_{n-1}$, $\forall n \geq 2$.

c) Demonstrați că $L_n = \frac{n(2n+1)(n+1)!}{36}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.