

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2014
Clasa a XII-a

Subiecte:

1. Pe $\mathbb{R}^*$ se consideră legea de compoziție definită prin:

$$a \circ b = \begin{cases} \frac{a}{b}, & \text{dacă } a < 0 \\ ab, & \text{dacă } a > 0 \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}^*.$$

- a) Să se precizeze dacă $(\mathbb{R}^*, \circ)$ este grup.
b) Să se rezolve ecuația $a \circ x \circ a = b$, $a, b \in \mathbb{R}^*$.

2. Fie $a \in [0, \infty)$, $f_a : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f_a(x) = \frac{x+a}{ax+1}$ și mulțimea
 $M = \{f_a \mid a \in [0, \infty)\}$.

- a) Să se arate că M este parte stabilă față de operația de compunere a funcțiilor.
b) Să se arate că M este monoid comutativ împreună cu operația de compunere a funcțiilor și să se determine elementele simetrizabile ale monoidului.

3. Să se determine funcțiile continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că admit o primitivă $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât :

$$F(x) + F([x]) + F(\{x\}) = f(x) + f([x]) + f(\{x\}) + 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ unde } [a] \text{ și } \{a\} \text{ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului } a.$$

Prof. Burtea Marius, Alexandria

4. Să se determine $x > 0$ care verifică relația $\int_x^{\ln 4} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = \frac{\pi}{3}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.