



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ, Botoșani, 22.02.2015

Clasa aXII-a BAREM DE NOTARE

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	$a) x \circ y = 3 \cdot x \cdot y + 6 \cdot x + 6 \cdot y + 10 \Leftrightarrow x \circ y = 3 \cdot (x+2) \cdot (y+2) - 2.$ Legea "o" este asociativă și comutativă(se verifică efectiv). Element neutru: $x \circ e = x \Leftrightarrow 3xe + 6x + 6e + 10 = x \Leftrightarrow 3xe + 5x + 6e + 10 = 0 \Leftrightarrow$ $x \cdot (3e+5) + 2 \cdot (3e+5) = 0 \Rightarrow e = \frac{-5}{3}.$ Elemente simetrizabile: $3 \cdot (x+2) \cdot (x'+2) - 2 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow (x+2) \cdot (x'+2) = \frac{1}{9};$ $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2;$ Atunci $x' = -2 + \frac{1}{9 \cdot (x+2)};$ Rezultă $a = -2.$	1p
	$b) x \circ x = 3 \cdot (x+2)^2 - 2;$ $x \circ x \circ x = 3^2 \cdot (x+2)^3 - 2;$ $\cdot$ $\cdot$ $\cdot$ $x^{(n)} = 3^{n-1} \cdot (x+2)^n - 2, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$ Se demonstrează prin inducție matematică $x^{(n)} = 3^{n-1} \cdot (x+2)^n - 2, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$	1p 1p
	$c) \text{ Fie } A = (m, \infty) \text{ parte stabilă în raport cu legea "o";}$ Din $x, y > m \Rightarrow x \circ y > m.$	1p

	Fie șirurile de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}, x_n > m, y_n > m, x_n \rightarrow m, y_n \rightarrow m;$ $3 \cdot x_n \cdot y_n + 6 \cdot x_n + 6 \cdot y_n + 10 > m.$ Trecând la limită $\Rightarrow 3m^2 + 11m + 10 \geq 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -2] \cup \left[-\frac{5}{3}, \infty\right);$ I. $m < -2$. Fie $y=0, x=-2+\frac{m+2}{2} > m;$ $x \circ y = 6 \cdot \frac{m+2}{2} - 2 = 3m + 4 > m \Rightarrow m > -2$ (fals). II. $m = -2$, atunci $x > -2, y > -2 \Rightarrow$ $x \circ y = 3 \cdot (x+2) \cdot (y+2) - 2 > -2$ (adevărat) $\Rightarrow m = -2$ convine. III. $m \geq -\frac{5}{3}$, atunci fie $x, y > m \Rightarrow x+2 > m+2 \geq \frac{1}{3}; y+2 > m+2 \geq \frac{1}{3} \Rightarrow$ $3(x+2)(y+2) - 2 > 3(m+2)^2 - 2;$ Să demonstrăm că $3(m+2)^2 - 2 \geq m \Leftrightarrow 3m^2 + 11m + 10 \geq 0$ (A) pentru că $m \in \left[-\frac{5}{3}, \infty\right).$ Deci $m \in \left[-\frac{5}{3}, \infty\right)$ convine. Soluția este $m \in \{-2\} \cup \left[-\frac{5}{3}, \infty\right).$	2p
2.	$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} \cdot (tg^{n-1}x + tg^n x + tg^{n+1}x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} \cdot tg^{n-1}x \cdot (1 + tgx + tg^2x) dx =$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} \cdot tg^{n-1}x \cdot (1 + tg^2x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} \cdot tg^n x dx =$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} \cdot tg^{n-1}x \cdot (tgx)' dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} \cdot tg^n x dx =$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} \cdot \frac{1}{n} \cdot (tg^n x)' dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} \cdot tg^n x dx =$ $\frac{1}{n} \cdot e^{nx} \cdot tg^n x \Big _0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} n \cdot e^{nx} \cdot tg^n x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} \cdot tg^n x dx = \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{n\pi}{4}}.$	4p

	$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\sqrt[n^2]{n \cdot I_n} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\pi}{4n}} - 1}{\frac{\pi}{4n}} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$	3p
3.	Din $(m, n) = 1 \Rightarrow (\exists) p, q \in \mathbb{N}$ astfel încât $m \cdot p \cdot n \cdot q = 1$;	3p
	$x \cdot y = (xy)^{m \cdot p \cdot n \cdot q} = (xy)^{m \cdot p} \cdot (xy)^{-n \cdot q} = \left((xy)^m \right)^p \cdot \left((xy)^n \right)^{-p} =$ $\left((yx)^m \right)^p \cdot \left((yx)^n \right)^{-p}$ $= (yx)^{m \cdot p} \cdot (yx)^{-n \cdot p} = (yx)^{m \cdot p - n \cdot q} = yx;$ $x \cdot y = y \cdot x \Rightarrow (G, \circ) \text{ este grup abelian.}$	4p
4.	Funcția $f(x) = \frac{1}{2 + \sin x}$, $x \in [0, 2\pi]$ este continuă pe $[0, 2\pi] \Rightarrow$ f admite primitive pe $[0, 2\pi]$.	1p
	Nu se poate folosi substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ deoarece pentru $x = \pi \in [0, 2\pi]$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ nu este definită. Vom construi o primitivă a funcției f pe J, J interval, $J = [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi]$. Fie $G : J \rightarrow \mathbb{R}$, J interval, $J \subset [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi]$, o primitivă a funcției f. Facem substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Integrala asociată este $I_1 = \int \frac{1+t^2}{2t^2+2t+2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t^2+t+1} dt = \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt =$ $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C;$ Fie $G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}}$, $x \in J$;	3p

	Construim o primitivă $F: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ a lui f pe $[0, 2\pi]$, de forma $F(x) = \begin{cases} G(x), & x \in [0, \pi) \\ k', & x = \pi \\ G(x) + k, & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$ Pentru determinarea legăturii dintre constantele k și k' se impune condiția de continuitate a funcției F în $x = \pi$. Funcția F este continuă în $x = \pi \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pi^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} F(x) = F(\pi) \Leftrightarrow$ $\frac{\pi}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + k = k' \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}; k' = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$ $F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}}, & x \in [0, \pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}, & x = \pi \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$ $\int \frac{1}{2 + \sin x} dx = F(x) + C, \quad x \in [0, 2\pi].$	3p
--	--	----