



Olimpiada de matematică

Faza locală 13.02.2015

Clasa a IX-a

BAREM

SUBIECTUL I Să se determine termenul al n -lea și rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ dacă $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$ și $a_1 = \alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.**Soluție**

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow \frac{S_m}{m^2} = \frac{S_n}{n^2} = k \Rightarrow S_m = k \cdot m^2 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$a_m = S_m - S_{m-1} = k(2m-1), \forall m \in \mathbb{N}^* \quad \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$a_1 = k = \alpha \Rightarrow a_n = \alpha \cdot (2n-1) \quad \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$r = a_{n+1} - a_n = 2\alpha \quad \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

SUBIECTUL II Să se rezolve ecuația în mulțimea numerelor reale

$$\left[\frac{2x+1}{5} \right] + \left[\frac{6x+8}{15} \right] + \left[\frac{6x+13}{15} \right] = 10, \text{ unde } [t] \text{ reprezintă partea întreagă a numărului real } t.$$

Soluție

$$\text{Notăm } y = \frac{2x+1}{5} \text{ și ecuația devine } [y] + \left[y + \frac{1}{3} \right] + \left[y + \frac{2}{3} \right] = 10 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\text{Din identitatea lui Hermite } [y] + \left[y + \frac{1}{3} \right] + \left[y + \frac{2}{3} \right] = [3y], \forall y \in \mathbb{R} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\text{Deci, } [3y] = 10 \Leftrightarrow \frac{10}{3} \leq y < \frac{11}{3} \quad \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Soluțiile ecuației din enunț sunt date de } \frac{10}{3} \leq \frac{2x+1}{5} < \frac{11}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{47}{6} \leq x < \frac{26}{3} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{47}{6}, \frac{26}{3} \right). \quad \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

SUBIECTUL III În triunghiul ABC având laturile $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, fie P intersecția dintre bisectoarea CE și mediana BD , $E \in (AB)$, $D \in (AC)$.Să se determine numerele x și y astfel încât $\overrightarrow{PA} = x \cdot \overrightarrow{PB} + y \cdot \overrightarrow{PC}$.**Soluție.**

$$\Delta PAB \Rightarrow \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA} \text{ și } \Delta PAC \Rightarrow \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CA} \dots (1p)$$



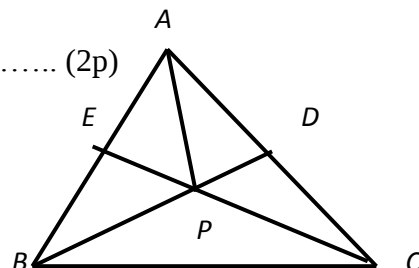
adunând relațiile obținem:

$$2\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \quad (1) \dots\dots\dots (2p)$$

Aplicăm teorema bisectoarei în triunghiul

$$\triangle BDC \Rightarrow \overrightarrow{PD} = -\frac{b}{2a}\overrightarrow{PB}, \text{ folosind } \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD},$$

$$\text{obținem } \frac{2a+b}{2a}\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}. \dots\dots\dots (2p)$$



Înlocuind în relația (1)

$$\text{obținem: } 2\overrightarrow{PA} = -\frac{b}{2a}\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}, \text{ dar } \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PA} \text{ de unde } \overrightarrow{PA} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC} \text{ deci}$$

$$x = -\frac{b}{a}, y = -1 \dots\dots (2p)$$

SUBIECTUL IV Fie triunghiul $DABC$ astfel încât $AB = 1$ cm și $AC = 2015$ cm. Fie M un punct în planul triunghiului $DABC$ astfel încât:

$$\overrightarrow{r_M} = \frac{1007}{2015}\overrightarrow{r_A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{r_B} + \frac{1}{4030}\overrightarrow{r_C}.$$

Demonstrați că $AM \perp BM$.

Soluție. $\overrightarrow{r_M} = \frac{1007}{2015}\overrightarrow{r_A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{r_B} + \frac{1}{4030}\overrightarrow{r_C} = \frac{1}{2}\left(\frac{2014}{2015}\overrightarrow{r_A} + \frac{1}{2015}\overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_B}\right). \dots\dots\dots 2p$

Fie $AB = c = 1$ cm și $AC = b = 2015$ cm. Atunci relația precedentă se scrie:

$$\overrightarrow{r_M} = \frac{1}{2}\left(\frac{b-c}{b}\overrightarrow{r_A} + \frac{c}{b}\overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_B}\right) (*) \dots\dots\dots 2p$$

Cum $\frac{b-c}{b} + \frac{c}{b} = 1$, alegând un punct N astfel încât $\frac{b-c}{b}\overrightarrow{r_A} + \frac{c}{b}\overrightarrow{r_C} = \overrightarrow{r_N}$, obținem că N se află pe segmentul (AC) și $\frac{AN}{NC} = \frac{c}{b-c}$, deci $\frac{AN}{AN+NC} = \frac{c}{b}$ sau $\frac{AN}{b} = \frac{c}{b}$, deci $AN = c = AB \dots\dots 2p$

Relația (*) se rescrie $\overrightarrow{r_M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_N} + \overrightarrow{r_B})$, deci M este mijlocul segmentului (NB) , deci AM este mediană în triunghiul isoscel $\triangle BAN$ de bază (BN) . În concluzie, AM este și înălțime, deci $AM \perp BM$ (1p)

Se punctează orice rezolvare corectă diferită de cea din barem