



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
9 FEBRUARIE 2013**

CLASA a X - a

1. Fie funcția $f: \left[\frac{5}{2}, \infty\right) \rightarrow \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$, $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Se cer:
 - a) Demonstrați că f inversabilă și determinați inversa ei;
 - b) Demonstrați că $\left\{x \in \left[\frac{5}{2}, \infty\right) / f(x) \leq f^{-1}(x)\right\} = \left\{x \in \left[\frac{5}{2}, \infty\right) / f(x) \leq x \leq f^{-1}(x)\right\}$;
 - c) Determinați mulțimea: $M = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 5 \geq 0, 2x^2 - 10x + 7 \leq \sqrt{4x + 1}\}$.
2. Să se arate că $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in (0, \infty)$ are loc relația $\left\lceil \log_{2013} \frac{a^x + a^{-x}}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \log_{2012} \frac{a^x + a^{-x}}{2} \right\rceil$, unde $[.]$ reprezintă partea întreagă.
3. Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $\log_y x > 0, \log_z y > 0, \log_x z > 0$. Demonstrați că $\log_y x + \sqrt{\log_z y} + \log_x z \geq 2\sqrt{2}$. Când avem egalitate?
4. Fie $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}, |z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$ și $0 \leq \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < \arg z_4 \leq \pi$. Demonstrați că $|z_1 + z_4| \leq |z_2 + z_3|$.

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru: 3 ore**