

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – 25.02.2017
Clasa a IX-a Matematică-Informatică



1. (7 p) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația : $16\{x\}^2 + 1 = 8x$
2. a) (3 p) Fie $a, b, c \in (0, +\infty)$ și $a + b + c = 2017$.
Să se arate că $\sqrt{ab + ac} + \sqrt{ab + bc} + \sqrt{ac + bc} \leq \frac{6051}{2}$.
b) (4 p) Demonstrați inegalitatea :
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, (\forall) a, b, c \in \mathbb{R}_+^*.$$
3. (7 p) Să se determine șirul de numere strict pozitive $(a_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $a_2 = 3$ și $\forall n \geq 2, \left(1 - \frac{1}{a_1^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_2^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{a_{n-1}^2}\right) = \frac{n \cdot a_n}{2 \cdot a_{n-1}^2}$
4. (7 p) În triunghiul ABC considerăm punctele $M \in (AB), N \in (AC)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{5}$ și $\frac{AN}{NC} = \frac{3}{4}$, fie $P \in (MN)$ astfel încât $\frac{MP}{PN} = \frac{2}{7}$. Dacă $AP \cap BC = \{Q\}$, să se determine valoarea raportului $\frac{BQ}{QC}$.

Notă:

Timp de lucru efectiv : 3 ore .

Toate subiectele sunt obligatorii.

Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – 25.02.2017
Clasa a X-a Matematică-Informatică



Problema 1

Pentru orice $a, b \in \mathbf{R}, a > 1, b > 1$, arătați că:

$$2 \left(\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ab} + \log_b \sqrt[4]{ab}} - \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{b}{a}} + \log_b \sqrt[4]{\frac{a}{b}}} \right) \sqrt{\log_a b} = \begin{cases} 2, & 1 < a \leq b \\ 2 \log_a b, & 1 < b < a \end{cases}$$

Problema 2

Rezolvați, în mulțimea numerelor reale pozitive, ecuația:

$$x^{x^{10}} = 10.$$

Problema 3

Fie z_1 și z_2 numere complexe distincte, astfel încât $|z_1| = |z_1 + z_2| = |z_2|$.

Calculați valoarea expresiei: $E = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2017} + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2017}$.

Problema 4

Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, care verifică relația:

$$f(x^2) + f(x+1) = x(x+1)(x^2 - x - 1) + 1, \text{ pentru } \forall x \in \mathbf{R}.$$

- Arătați că funcția f nu este injectivă.
- Dați un exemplu pentru funcția f , care verifică relația dată.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală – 25.02.2017
Clasa a XI-a Matematică-Informatică



Problema 1(7 puncte)

Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir astfel încât $a_0 > 0$ și $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2 + a_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

(3p) a) Să se arate că $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict crescător și nemărginit.

(4p) b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt[3]{n}}$.

Problema 2 (7 puncte)

Se consideră funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{2x^2 + mx + 3}{x^2 + mx + 4}$, unde $m \in \mathbb{R}$, iar D este domeniul maxim de definiție al funcției. Determinați valorile parametrului real m pentru care graficul funcției f admite exact două asimptote. Precizați ecuațiile acestor asimptote.

Problema 3 (7 puncte)

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mihai construiește noi matrice, plecând de la A astfel: în

prima etapă, alege cinci elemente ale lui A , cărora le schimbă semnul. În continuare, poate efectua de oricâte ori dorește următoarele operații: fie adună la o linie elementele unei alte linii, fie adună la o coloană elementele unei alte coloane.

(5p) a) Arătați că determinantul matricei obținute după prima etapă este 0,4 sau -4 .

(2p) b) Poate Mihai să obțină matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$?

Problema 4 (7 puncte)

(3p)a) Arătați că nu există matrice $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X \cdot Y - Y \cdot X = I_n$.

(4p) b) Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, astfel încât $A \cdot B - B \cdot A = B$, să se arate că B nu este inversabilă.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală – 25.02.2017
Clasa a XII-a Matematică-Informatică



Problema 1 (7 puncte)

Determinați primitivele funcției: $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \frac{x - \arctg x}{(1+x^2)^2 (\arctg x)^3}$.

Problema 2 (7 puncte)

Se consideră funcțiile $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, două funcții derivabile cu derivate continue.

(4p) a) Determinați $\int [f'(x) + f(x) \cdot g'(x)] \cdot e^{g(x)} dx$.

(3p) b) Folosind eventual punctul a) , calculați : $\int \frac{x^2 \ln x - \ln x + x}{x} \cdot e^{\frac{x+1}{x}} dx$, $x > 0$.

Problema 3 (7 puncte)

Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & bi \\ 0 & 0 & 0 \\ bi & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$.

(4p) a) Demonstrați ca $(G, \cdot)$ formează grup.

(3p) b) Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$, să se calculeze A^{2017} .

Problema 4 (7 puncte)

Arătați că grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ nu sunt izomorfe.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte