



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 16 februarie 2019

Clasa a XII-a

Barem de corectare și notare

Problema 1

Pe mulțimea $G = [0, 1)$ se definește legea de compoziție $x * y = \{x + y\}$, unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului real a .

(5p) a) Arătați că $(G, *)$ este grup abelian.

(2p) b) Să se rezolve ecuația $x * x * x = \frac{3}{4}$.

Soluție:

a) $(G, *)$ - grup abelian:

G stabilă în raport cu legea: $\forall x, y \in G, \{x + y\} \stackrel{def}{=} x + y - [x + y] \in [0, 1)$ 1p

$G_1 : (x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in G$

$$(x * y) * z = \{x + y\} * z = \{\{x + y\} + z\} \stackrel{prop.}{=} \{x + y + z\}$$

$$x * (y * z) = x * \{y + z\} = \{x + \{y + z\}\} \stackrel{prop.}{=} \{x + y + z\}$$

$\Rightarrow$ legea "*" este asociativă pe mulțimea G 1p

$G_2 : \exists e \in G, x * e = e * x = x, \forall x \in G$

din $\{x + e\} = x \in [0, 1), \forall x \in G \Rightarrow e \in \mathbf{Z} \Rightarrow e = 0 \in G$ element neutru 1p

$G_3 : \forall x \in G, \exists x' \in G : x * x' = x' * x = e$

$$\{x + x'\} = 0, \forall x \in G = [0, 1) \Rightarrow x + x' \in \mathbf{Z}, \forall x \in [0, 1) \Rightarrow x' = 1 - x \in [0, 1), \forall x \in [0, 1)$$

oricare element din G este simetrizabil în raport cu legea "*" 1p

$G_4 : x * y = y * x, \forall x, y \in G$

$\{x + y\} = \{y + x\}$ adev. pt. $\forall x, y \in G$, deoarece "+" este comutativă pe $\mathbf{R} \cap [0, 1)$ 1p



$$b) x * x * x \stackrel{asoc}{=} (x * x) * x \stackrel{def}{=} \{x + x\} * x = \{2x\} * x = \{\{2x\} + x\} = \{2x + x\} = \{3x\}, \forall x \in G$$

$$\text{Atunci ecuația (1) } x * x * x = \frac{3}{4} \text{ este echivalentă cu } \{3x\} = \frac{3}{4}, x \in [0, 1) \quad \dots\dots\dots 1p$$

Discuție:

$$\text{Dacă } 0 \leq 3x < 1 \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \{3x\} = 3x \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 3x = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \in \left[0, \frac{1}{3}\right);$$

$$\text{Dacă } 1 \leq 3x < 2 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \text{ atunci } \{3x\} = 3x - [3x] = 3x - 1 \text{ și } (1) \Leftrightarrow 3x - 1 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{7}{12} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Dacă } 2 \leq 3x < 3 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right), \text{ atunci } \{3x\} = 3x - [3x] = 3x - 2 \text{ și } (1) \Leftrightarrow 3x - 2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{11}{12} \in \left[\frac{2}{3}, 1\right),$$

$$\text{Deci, mulțimea soluțiilor ecuației (1) este } S = \left\{\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}\right\} \quad \dots\dots\dots 1p$$

Problema 2

$$\text{Fie } f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x}, & x \in (-1, \infty) \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

(3p) a) Arătați că f are primitive pe $(-1, \infty)$.

(2p) b) Dacă $F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f , arătați că aceasta este strict crescătoare pe $(-1, \infty)$.

$$(2p) c) \text{ Calculați } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0) - x}{x^2}.$$

Soluție:

a) Continuitatea lui f în 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1 \text{ iar } f(0) = 1 \text{ deci } f \text{ este continuă în } 0 \quad \dots\dots\dots 2p$$

Și cum f este continuă pe $x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$ rezultă că f este continuă pe $(-1, \infty)$ deci f admite primitive pe $(-1, \infty)$ 1p

b) Dacă F este o primitivă a lui f rezultă $F'(x) = f(x), \forall x \in (-1, \infty)$ 1p

$$\text{Avem } f(x) = 0 \Rightarrow \frac{\ln(x+1)}{x} = 0 \Rightarrow \ln(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ dar } x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$$

$\left. \begin{array}{l} f \text{ nu se anulează în } (-1, \infty) \\ \text{avem } f(x) > 0, \forall x \in (-1, \infty) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in (-1, \infty) \Rightarrow F \text{ este strict crescătoare pe } (-1, \infty) \dots\dots 1p$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(F(x) - F(0) - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x) - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(x+1)}{x} - 1}{2x} = \dots\dots\dots 1p$$



$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(x+1)-1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)-x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(x+1)-x)'}{(2x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1}-1}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x-1}{4x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{4x(x+1)} = -\frac{1}{4} \dots\dots\dots 1p$$

Problema 3

Se consideră $I_0 = \int \sqrt{1-x} dx$ și $I_k = \int x^k \sqrt{1-x} dx$, $x \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

(4p) a) Calculați I_0 .

(3p) b) Arătați că $I_k = \frac{2k}{2k+3} I_{k-1} - 2x^k(1-x)\sqrt{1-x}$.

Soluție:

$$a) I_0 = \int \sqrt{1-x} dx = \int (1-x)^{\frac{1}{2}} dx = -\int t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = -\frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3} \sqrt{(1-x)^3} + C \dots\dots\dots 4p$$

$$b) I_k = \int x^k \sqrt{1-x} dx = \int x^k \left[-\frac{2}{3} \sqrt{(1-x)^3} \right]' dx = -\frac{2}{3} x^k \sqrt{(1-x)^3} + \frac{2}{3} \int x^{k-1} \sqrt{(1-x)^3} dx = \\ = -\frac{2}{3} x^k (1-x) \sqrt{(1-x)} + \frac{2}{3} \int x^{k-1} (1-x) \sqrt{(1-x)} dx = \dots\dots\dots 1p$$

$$= -\frac{2}{3} x^k (1-x) \sqrt{(1-x)} + \frac{2k}{3} I_{k-1} - \frac{2k}{3} I_k \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow I_k = -\frac{2}{3} x^k (1-x) \sqrt{(1-x)} + \frac{2k}{3} I_{k-1} - \frac{2k}{3} I_k \Rightarrow I_k = \frac{2k}{2k+3} I_{k-1} - 2x^k(1-x)\sqrt{1-x} \dots\dots\dots 1p$$

Problema 4

Să se calculeze $\int_0^{\ln 2} \arctg(e^x - 1) dx$.

Soluție:

$$\text{Schimbăm variabila: } e^x - 1 = t \Rightarrow x = \ln(t+1) \Rightarrow dx = \frac{1}{t+1} dt,$$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \ln 2 \Rightarrow t = 1$, atunci avem:

$$I = \int_0^{\ln 2} \arctg(e^x - 1) dx = \int_0^1 \frac{\arctgt}{t+1} dt \dots\dots\dots 1p$$

apoi, schimbăm variabila astfel: $t = tg u \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 u} du = (1 + tg^2 u) du$, respectiv,

$$t = 0 \Rightarrow u = tg 0 = 0, \quad t = 1 \Rightarrow u = tg 1 = \frac{\pi}{4}, \text{ atunci avem: } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{u(1 + tg^2 u)}{1 + tg u} du$$

.....1p



schimbăm variabila: $u = \frac{\pi}{4} - v \Rightarrow du = -dv$, respectiv,

$$u = 0 \Rightarrow v = \frac{\pi}{4}, \quad u = \frac{\pi}{4} \Rightarrow v = 0, \text{ atunci avem: } I = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\left(\frac{\pi}{4} - v\right) \left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - v\right)\right]}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - v\right)} (-1) dv =$$

..... 2p

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\frac{\pi}{4} - v\right) \left[1 + \left(\frac{1 - \operatorname{tg} v}{1 + \operatorname{tg} v}\right)^2\right]}{1 + \frac{1 - \operatorname{tg} v}{1 + \operatorname{tg} v}} dv = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\frac{\pi}{4} - v\right) \cdot \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 v)}{(1 + \operatorname{tg} v)^2}}{1 + \operatorname{tg} v} dv =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 v}{1 + \operatorname{tg} v} dv - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{v(1 + \operatorname{tg}^2 v)}{1 + \operatorname{tg} v} dv = \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \operatorname{tg} v)'}{1 + \operatorname{tg} v} dv - I =$$

.....2p

$$= \frac{\pi}{4} \ln(1 + \operatorname{tg} v) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I$$

$$\text{Deci } I = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{8} \ln 2. \quad \text{.....1p}$$