



Olimpiada Națională de Matematică 2017 Etapa locală – Iași, 24 februarie 2017

CLASA A X-A

Problema 1.

Determinați numerele naturale n pentru care

$$\frac{1}{\sqrt{54^n}} + \frac{1}{\sqrt{27^n}} + \frac{1}{\sqrt{9^n}} + \frac{1}{\sqrt{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}.$$

Gazeta Matematică 12/2016

Problema 2.

Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \log_{\frac{1}{2}}(x-1).$$

Problema 3.

Spunem că o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este *remarcabilă* dacă $f(x^3) = f^2(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

- Arătați că există funcții remarcabile neconstante.
- Demonstrați că o funcție remarcabilă nu poate fi nici injectivă, nici surjectivă.

Problema 4.

Dacă a este un număr complex, considerăm mulțimea

$$M_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |az+1| = |z|\}.$$

Notăm cu $\mathcal{F}_a$ mulțimea imaginilor în planul complex ale tuturor elementelor lui M_a .

- Determinați $\mathcal{F}_0$ și $\mathcal{F}_1$.
- Demonstrați că $\mathcal{F}_a$ este o dreaptă sau un cerc.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.