

MATEMATIKA OLIMPIÁSZ

KÖRZETI SZAKASZ

2017. január 28.

IX. OSZTÁLY

- 1.) Bizonyítsd be az alábbi egyenlőséget:

$$\left[\sqrt{1} \right] + \left[\sqrt{2} \right] + \left[\sqrt{3} \right] + \dots + \left[\sqrt{n^2} \right] = \frac{n(4n^2 - 3n + 5)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

ahol $[x]$, az x egész részét jelenti.

- 2.) Ha a, b, c az ABC háromszög oldalainak hossza, igazold, hogy:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

- 3.) Legyenek AA', BB', CC' az ABC általános háromszög belső szögfelezői, ahol $A' \in BC$, $B' \in AC$ és $C' \in AB$. Ha a, b és c rendre a BC, AC illetve az AB oldalak hosszai, igazold, hogy:

$$(b+c)\overrightarrow{AA'} + (a+c)\overrightarrow{BB'} + (a+b)\overrightarrow{CC'} = (2b-a-c)\overrightarrow{AB} + (2c-a-b)\overrightarrow{AC}$$

- 4.) Az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük: $a_1 = 0$ és $a_{n+1} = a_n + 1 + \sqrt{4a_n + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Határozd meg n függvényében a sorozat a_n általános tagját!

b) Igazold, hogy: $\sqrt{4a_1 + 1} + \sqrt{4a_2 + 1} + \dots + \sqrt{4a_n + 1} = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.