



S.S.M.R - FILIALA MUREȘ

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a XII-a

Subiectul I

Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + b = t \neq 0$ și $ab = cd$. Se consideră mulțimea:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} ax+1 & 0 & cx \\ 0 & 0 & 0 \\ dx & 0 & bx+1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{t} \right\} \right\}. \text{ Arătați că:}$$

- a) $(M, \cdot)$ este grup abelian.
b) $(M, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(G, *)$ unde $G = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{t} \right\}$ și $x * y = x + y + txy$.

Subiectul II

Fie șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general:

$$I_n = \int_0^{\frac{x}{t}} e^{nx} (tg^{n-1}x + tg^n x + tg^{n+1}x) dx, n \geq 1.$$

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{nI_n} - 1 \right).$

Subiectul III

Fie I, J intervale și $f: I \rightarrow \mathbb{R}^*$ o funcție cu primitiva $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ bijectivă.

- a) Să se calculeze $\int \frac{F^{-1}(x)}{f(F^{-1}(x))} dx, x \in J.$
b) Să se calculeze $\int \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} dx, x \in \mathbb{R}.$

Subiectul IV]

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel și $a, b \in A$, astfel încât $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ și $(a+b)^3 = a^3 + b^3$.

Să se arate că $(a+b)^n = a^n + b^n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4.$ (G.M.)

Notă. Toate

problemele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.