

Olimpiada națională de matematică

Etapă locală, 15 februarie 2014

Clasa a X a

1. Se consideră un număr natural nenul n fixat și pentru orice număr natural $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ se notează $a_k = (\sqrt{2})^{n-k} \cdot (\sqrt[4]{3})^k$. Determinați numerele naturale n pentru care mulțimea $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ conține exact 10 numere raționale.

* * *

2. Determinați numerele naturale $n \geq 1$ pentru care $n = \log_2(1+n) + \log_3 n$.

Lucian Dragomir, supliment Gazeta Matematică 9/2013

3. Se notează cu $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care au proprietatea

$$f(x)f(y) = f(x+y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

și, pentru orice $f \in \mathcal{F}$, se consideră mulțimea $H(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\}$

- a) Arătați că există $g \in \mathcal{F}$ și determinați în acest caz $H(g)$
b) Demonstrați că, dacă $f \in \mathcal{F}$, atunci f nu este surjectivă.
c) $f \in \mathcal{F}$ este injectivă dacă și numai dacă $H(f) = \{0\}$.

4. Se consideră numerele reale a, b, c și mulțimile $A = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \mid z^2 + az \in \mathbb{R}\}$,

$$B = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \mid z^2 + b\bar{z} + cz \in \mathbb{R}\}. \text{ Arătați că } A = B \text{ dacă și numai dacă } a + b = c.$$

RMT 1/2011

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.