

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – 16.02.2019**  
**BAREM DE CORECTARE**  
**CLASA A V-A**

**SUBIECTUL 1**

Se știe că **a** este un număr natural de cel mult patru cifre, care împărțit la 2019 dă restul un număr natural de 2 cifre .

- a) Aflați suma celor mai mici 50 de valori pe care le poate lua **a** .
- b) Aflați câte valori numere naturale poate lua **a** , astfel încât restul împărțirii să fie un număr natural pătrat perfect.

**Soluție:**

- a) Forma generală a unui element **a** este:  $2019 \cdot c + \overline{xy}$ ,  $x \neq 0$ ,  $x, y$  cifre,  $c \in N$  .....1p  
 Pentru  $c = 0$  , obținem elementele: 10,11,12.....59 .....1p  
 Atunci  $S = 10 + 11 + \dots + 59 = 1725$ .....1p
- b)  $2019 \cdot c + \overline{xy} \leq 9999 \Rightarrow c \leq 4 \Rightarrow c$  ia 5 valori.....2p  
 $\overline{xy}$  pătrat perfect de 2 cifre  $\Rightarrow \overline{xy}$  ia 6 valori .....1p  
 Avem  $5 \times 6 = 30$  de valori.....1p

**SUBIECTUL 2**

- a) Determinați numerele naturale de forma  $\overline{abc}$  care verifică egalitatea :  
 $\overline{abc} = 10 \cdot (a + b + c)^2$

b) Determinați numerele naturale de două cifre care au proprietatea că suma pătratelor cifrelor sale este cub perfect.

**Soluție:**

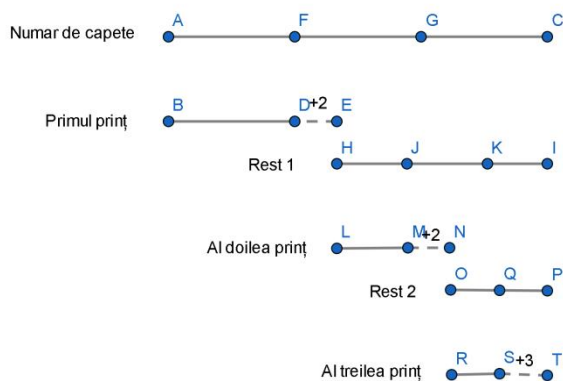
- a)  $\overline{abc} : 10 \Rightarrow c = 0$  .....1p  
 $10 \cdot \overline{ab} = 10 \cdot (a + b)^2$ .....1p  
 $\overline{ab} = (a + b)^2$  și finalizare  $a=8$  și  $b=1$ .....1p
- b) Dacă  $a$  este cifra zecilor, iar  $b$  cifra unităților, trebuie ca  $a^2 + b^2 = n^3$ ,  
 unde  $1 \leq a \leq 9$  și  $0 \leq b \leq 9$  .....1p  
 Atunci  $1 \leq n^3 \leq 9^2 + 9^2 \Leftrightarrow 1 \leq n^3 \leq 162$ . Rezultă:  $n^3 \in \{1, 8, 27, 64, 125\}$ .....1p  
 $a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow a=1$  și  $b=0$  .....0,5p  
 $a^2 + b^2 = 8 \Leftrightarrow a=2$  și  $b=2$ .....0,5 p  
 $a^2 + b^2 = 64 \Leftrightarrow a=8$  și  $b=0$ .....0,5 p  
 Finalizare 10; 22; 80.....0,5 p

### SUBIECTUL 3

Trei prinți au luptat cu un balaur cu multe capete. Primul prinț a tăiat cu mâna dreaptă o treime din capetele balaurului și încă două capete cu mâna dreaptă. Al doilea prinț, cu mâna dreaptă a tăiat o treime din capetele rămase ale balaurului și cu mâna stângă încă două. Al treilea a tăiat cu mâna dreaptă jumătate din capetele rămase și cu mâna stângă ultimele 3 capete ale balaurului. Câte capete a avut balaurul?

**Soluție:**

Reprezentare grafică: .....2p



Al treilea prinț a tăiat  $3+3=6$  capete .....1 p

Al doilea prinț a tăiat 6 capete .....2 p

Primul prinț a tăiat 9 capete .....1 p

Finalizare 21 capete în total .....1 p

### SUBIECTUL 4

Aflați numerele naturale  $a$ ,  $b$  și  $c$  astfel încât  $2^a + 2^{2b} + 2^{3c} = 2^{400}$

G.M. Nr. 11, 2018

**Soluție:**

Presupunem că  $a, 2b, 3c$  sunt toate 3 diferite. Atunci  $\exists x, y, z \in \mathbb{N}$  cu  $x < y < z$  astfel încât:

$$2^a + 2^{2b} + 2^{3c} = 2^x + 2^y + 2^z$$

Deci  $2^x + 2^y + 2^z = 2^{400}$  și avem  $2^x \cdot (1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}) = 2^{400}$  (F).....1p

Dacă 2 dintre numerele  $a, 2b$  și  $2c$  sunt egale atunci avem:

$$2^x + 2^x + 2^y = 2^{400}, \text{ unde } x, y \in \mathbb{N} \text{ de unde obținem } 2^{x+1} + 2^y = 2^{400} \dots\dots\dots 1p$$

Numerele  $x+1$  și  $y$  sunt egale .....1p

$$\text{Obținem } 2^{x+1} + 2^{x+1} = 2^{400} \text{ și deci } 2^{x+2} = 2^{400} \Rightarrow x=398 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Deci } 2^a + 2^{2b} + 2^{3c} = 2^{398} + 2^{398} + 2^{399} \dots\dots\dots 1p$$

$$3c=399 \dots\dots\dots 1p$$

$$a=2b=398 \dots\dots\dots 1p$$