

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

17 februarie 2019

CLASA a VII-a

1. Numerele naturale $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2019}$ sunt invers proporționale cu numerele $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2019}$ și

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{2019} = 2020^2$$

a) (4p) Determinați numerele naturale $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2019}$.

b) (3p) Calculați suma $S = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2018} \cdot a_{2019}}$.

2. a) (2p) Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, scrise în baza zece, astfel încât $a + b = 10$ și $\left[\sqrt{ab} \right] = 6$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

b) (5p) Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, scrise în baza zece cu cifre distincte, astfel încât $a \cdot b = c$ și $n = \sqrt{\overline{abc} + \overline{cab} + \overline{bca} - (\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}) - (a + b + c)}$ să fie număr natural.

3. (7p) Se consideră triunghiul $\triangle ABC$, $AB < AC < BC$ și M mijlocul laturii (BC) . Notăm cu D intersecția dintre dreptele AF și BE , unde E este simetricul lui B față de dreapta AM , iar F este simetricul lui A față de M . Arătați că patrulaterul $AECF$ este trapez isoscel.

4. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $m(\angle DAB) < 90^\circ$. Bisectoarea unghiului $\angle DAB$ intersectează BD în M , iar bisectoarea unghiului $\angle ADC$ intersectează AC în N . Arătați că:

a) (3p) $DM \cdot NC = AN \cdot MB$;

b) (4p) patrulaterul $ANMD$ este trapez ortodiagonal.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.