



MINISTERUL EDUCAȚIEI



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN PRAHOVA



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE ASTRONOMIE ȘI ASTROFIZICĂ

EDIȚIA A XX-A, 7 – 11 Iunie 2023, VĂLENI DE MUNTE,
PRAHOVA

PROBA TEORETICĂ SCRISĂ CATEGORIA SENIORI 2

- Se punctează oricare alte formulări/modalități de rezolvare corectă a cerințelor.
- Nu se acordă punctaje intermediare la subiectele de tip grilă.

Subiectul I (10 puncte)

1. Aberația luminii este nulă pentru aștrii aflați:

- A) la Zenit;
- B) la orizont;
- C) în planul ecliptic;
- D) la culminația superioară.

2. Diametrul unghiular α al Soarelui pe parcursul unui an atinge un minim de $31'28''$ și un maxim de $32'33''$. Dacă a este semiaxa mare și x distanța dintre centrul orbitei Pământului și focarul în care se găsește Soarele, atunci relația dintre a și x va fi:

- A) $a=20x$
- B) $a=30x$
- C) $a=40x$
- D) $a=60x$

3. Paralaxa diurnă orizontală a unui obiect din Sistemul Solar este maximă atunci când obiectul:

- A) este la orizont;
- B) este la zenit;
- C) este la meridian deasupra orizontului;
- D) este la primul vertical deasupra orizontului.

4. Care este perioada de rotație a unei planete în jurul unei stele cu masa $M=1,5M_{\text{Soare}}$? Masa planetei este mult mai mică în comparație cu masa stelei. Se cunosc: constanta gravitațională G ; masa Soarelui M_{Soare} ; distanța Pământ-Soare R_{PS} ; distanța planetă-stea $a=3R_{PS}$.

A)	B)	C)	D)
$2\pi R_{PS} \sqrt{\frac{2R_{PS}}{G \cdot M_{Soare}}}$	$4\pi R_{PS} \sqrt{\frac{3R_{PS}}{G \cdot M_{Soare}}}$	$6\pi R_{PS} \sqrt{\frac{2R_{PS}}{G \cdot M_{Soare}}}$	$8\pi R_{PS} \sqrt{\frac{3R_{PS}}{G \cdot M_{Soare}}}$

5. Mareele oceanice înalte apar la fiecare:

- A) 24 de ore
- B) 24h50m
- C) 12h25m
- D) 23h56m

6. Variația de magnitudine a unui sistem stea-exoplanetă este $\Delta m = 0,02$, dacă raza exoplanetei reprezintă o fracțiune din raza stelei egală cu:

- A) 0,351
- B) 0,135
- C) 0,178
- D) 0,261

7. Raportul semnal-zgomot al unui telescop optic, care utilizează o cameră CCD, atunci când se înregistrează imaginea unei stele relativ strălucitoare se dublează, dacă timpul de expunere crește de aproximativ:

- A) două ori
- B) zece ori
- C) șase ori
- D) patru ori.

8. Un asteroid sferic are diametrul 10 km și densitatea medie $2,5 \text{ g/cm}^3$. La ce viteză un corp poate evada de pe suprafața asteroidului? Se cunoaște $K=6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

- A) 3,57 m/s;
- B) 4,16 m/s;
- C) 5,81 m/s;
- D) 6,34 m/s.

9. Refracția astronomică nu modifică poziția astrilor aflați:

- A) la Zenit;
- B) la orizont;
- C) în planul ecliptic;
- D) la culminația superioară.

10. Distanța de la Pământ la o stea este 30 al. Cât este paralaxa stelei în secunde de arc dacă $1 \text{ al} = 63240 \text{ UA}$?

- A) 0,47''
- B) 0,28''

- C) $0,11''$
D) $0,02''$

Subiectul II (15 puncte)

II.1. Steaua β Gem (Pollux) (7 puncte)

Steaua β Gem (Pollux) este cea mai strălucitoare stea din constelația Gemini. Se cunosc coordonatele actuale ecuatoriale ale stelei: $\alpha_{2023} = 7h\ 46m\ 45s$, $\delta_{2022} = 27^\circ\ 58'\ 9''$ iar cele ecliptice: $\lambda_{2023} = 113^\circ\ 32'\ 11''$ respectiv $\beta_{2023} = 6^\circ\ 41'\ 12''$. Steaua este observată de pe Pământ, dintr-un loc de latitudine $\varphi = 47^\circ\ 39'\ 26''$. Perioada de precesie a echinocțiilor este $T_P = 25.771,5\ ani$, iar înclinarea eclipticii față de ecuatorul ceresc este $\varepsilon = 23^\circ\ 26'\ 10''$. Să se afle:

- a) **(4 puncte)** Azimutul stelei Pollux la momentul răsăritului.
b) **(3 puncte)** În ce an de acum înainte, răsăritul stelei Pollux se va produce în dreptul punctului cardinal Vest? Veți presupune că înclinarea eclipticii față de ecuator nu se modifică.

II.2 Un sistem stea-exoplanetă (8 puncte)

Un astronom a decoperit o exoplanetă la o distanță de 10 pc de Pământ. După o observare mai atentă a sistemului stea-exoplanetă, a aflat că steaua în jurul căreia orbitează exoplaneta are masa și raza de trei ori mai mici ca masa și raza Soarelui. Raportul dintre raza stelei și raza exoplanetei este 14,7. Steaua centrală se află pe secvența principală. Se cunosc: masa Soarelui $M_S = 2 \cdot 10^{30}\ kg$, viteza de propagare a luminii în vid $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$, luminozitatea Soarelui $L_S = 3,828 \cdot 10^{26}\ W$, temperatura la suprafața Soarelui $T_S = 5777\ K$, magnitudinea absolută a Soarelui $M_S = +4,83$. Să se afle:

- a) **(1 punct)** luminozitatea stelei (în luminozități solare). În relația masă-luminozitate se va lua $\alpha = 3,8$.
b) **(2 puncte)** magnitudinea aparentă a stelei și temperatura la suprafața stelei.

Pentru observarea tranzitelor, astronomul a folosit un telescop dotat cu o cameră CCD. Se cere:

- c) **(2 puncte)** adâncimea tranzitului
d) **(3 puncte)** raportul semnal/zgomot minim pentru observarea tranzitului.

Subiectul III (25 puncte)

III.1 Lărgimea naturală a liniilor spectrale (8 puncte)

Deși tranzițiile atomice au energii cuantificate, liniile observate în spectrele de emisie sau de absorbție nu au grosime nulă. Printre altele, acest efect se datorează Principiului Incertitudinii al lui Heisenberg. Din cauză că durată de viață a stărilor excitate are o anumită incertitudine, energia fotonilor emiși va avea de asemenea o incertitudine. Obiectivele problemei sunt estimarea importanței acestui efect și utilizarea modelului propus, pentru a identifica tipul de astru de la care provine un anumit spectru de emisie.

Problema se va baza pe modelul atomic Bohr, la baza căruia stau următoarele principii:

- Electronii orbitează nucleul pe traiectorii circulare.
- Electronii nu emit energie sub formă de radiație electromagnetică și razele orbitelor permise fac parte dintr-un set discret.
- Electronii pierd sau câștigă energie doar prin emiterea sau absorbția unor fotoni. Energia fotonilor trebuie să fie egală cu diferența dintre energiile corespunzătoare celor două straturi între care se realizează tranziția.
- Momentul cinetic este cuantificat prin relația $L_n = n\hbar$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Consideră un atom hidrogenoid (cu un singur electron de valență) cu numărul atomic Z .

- (1,5 puncte)** Determină raza r_n , viteza v_n și accelerația a_n corespunzătoare orbitei circulare a electronului cu momentul cinetic $L_n = n\hbar$.
- (2 puncte)** Determină energia E_n a electronului pe stratul n . Află expresia matematică a constantei Rydberg R și calculează-i valoarea numerică. În subpunctele următoare, rezultatele se pot exprima, dacă este necesar, și în funcție de constanta Rydberg R .
- (0,5 puncte)** Sarcinile aflate în mișcare accelerată emit radiație Larmor, a cărei putere se poate exprima prin relația $P = \kappa a^\alpha q^\beta c^\gamma \varepsilon_0^\delta$, unde a este modulul accelerației sarcinii, q este sarcina electrică, c este viteza luminii în vid, iar ε_0 este permitivitatea electrică a vidului. Folosind analiza dimensională, determinați valorile constantelor α, β, γ și δ . În expresia dată, κ este o constantă adimensională. În continuarea problemei, se cunoaște că valoarea sa este $\frac{1}{6\pi}$.
- (1,5 puncte)** Pentru a estima cât timp va rămâne electronul pe stratul n_2 , până când pierde energie prin emisia unui foton și coboară pe stratul $n_1 < n_2$, presupune că pierderea de energie ar fi datorată radiației Larmor. Determină expresia acestei durate de viață τ . Calculează valoarea numerică în cazul tranziției Ly- α a hidrogenului.
- (1 punct)** Estimează incertitudinea energiei fotonului emis ΔE și a lungimii de undă $\Delta \lambda$, presupunând că lungimea de undă centrală a liniei spectrale este λ_0 .
- (1,5 puncte)** Explică efectul presiunii gazului asupra lărgimii liniei spectrale. Comparând spectrele de emisie provenite de la o stea pitică albă și de la o stea gigantă roșie, care dintre ele ar prezenta linii mai largi? Justifică răspunsul cu atenție.

Se consideră cunoscute următoarele mărimi:

- $c = 2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ (viteza luminii în vid),
- $e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$ (sarcina electrică elementară)
- $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} kg$ (masa electronului)
- $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$ (permitivitatea electrică a vidului),
- $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ (constanta redusă a lui Planck)

III.2 Corp Negru (8 puncte)

A. În urmă cu mai bine de un secol, Max Planck a găsit forma corectă pentru intensitatea radiației emise de un corp negru, aflat la echilibru termic la temperatura T , în funcție de frecvență:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (\text{Wm}^{-2}\text{Hz}^{-1}\text{sr}^{-1}).$$

Tot atunci au fost descoperite alte doua legi, care descriu destul de bine emisia de radiație electromagnetică de către un corp cald. Una dintre ele dădea rezultate bune la lungimi de undă mari ale radiației emise (legea Rayleigh-Jeans). Cealaltă avea erori mai mici la lungimi de undă mici (aproximarea lui Wien). Se cere:

- a) **(2 puncte)** să se deducă legea Rayleigh-Jeans și legea lui Wien din legea lui Planck
- b) **(1 punct)** de ce legea Rayleigh-Jeans este evident în dezacord cu realitatea la frecvențe mari?
- c) **(2 puncte)** găsiți o formă echivalentă a legii lui Planck, care să exprime intensitatea radiației în funcție de lungimea de undă a radiației emise $B_\lambda(T)$ ($\text{Wm}^{-2}\text{m}^{-1}\text{sr}^{-1}$).

B. Legea lui Planck ne arată, că intensitatea radiației emise de un corp negru nu este aceeași în tot spectrul de lungimi de undă. Stelele mai fierbinți ne apar albastre, iar cele mai reci le percepem ca fiind roșiatice. Pentru aceeași stea, putem măsura mai multe magnitudini la diverse lungimi de undă și astfel putem determina clasa spectrală căreia îi aparține steaua. Sistemul de magnitudini UBVRi folosește magnitudinea B (albastru) care crespunde lungimii de undă de 440 nm, respectiv magnitudinea V (în vizual) care corespunde lungimii de undă de 558 nm. Diferența celor două magnitudini se numește indice de culoare și poate fi folosită pentru determinarea **temperaturii de culoare**. Sistemul UBVRi este calibrat astfel ca să rezulte un indice de culoare B-V de valoare zero, pentru o stea de clasă spectrală A0 cu o temperatură de culoare de aproximativ 15 000 K.

- d) **(3 puncte)** Să se demonstreze că temperatura de culoare T_c are expresia:

$$T_c = \frac{7000 \text{ K}}{(B - V) + 0,47}$$

III.3 Cometa Shoemaker-Levy 9 (9 puncte)

Cometa Shoemaker-Levy 9, descoperită în anul 1993, a fost prima cometă care orbita în jurul unei planete, nu în jurul Soarelui. Probabil că înainte cu 20-30 de ani de descoperire ea, a fost capturată de planeta Jupiter, atunci când a intrat în sfera ei de influență gravitațională.

- a) **(4 puncte)** Determinați raza sferei Hill (sfera de influență gravitațională) a lui Jupiter și arătați că Shoemaker-Levy 9 se afla sub influența gravitațională dominantă a lui Jupiter.
- b) **(3 puncte)** Demonstrați că dezintegrarea cometei era inevitabilă.
- c) i) **(1 punct)** Studiile spectroscopice efectuate asupra atmosferei planetei Jupiter au pus în evidență existența metanului (CH_4), care are o lungime de undă caracteristică în vizibil $\lambda_0=620 \text{ nm}$, măsurată poziționând spectrofotometrul pe direcția centrului planetei. Cunoscând perioada de rotație a lui Jupiter, $T_J=9^h50^m$, determinați deplasarea liniei spectrale prin efect Doppler între două puncte de emisie, situate diametral opus în planul ecuatorial al planetei.

ii) **(1 punct)** Un gaz este reținut de o planetă pentru o perioadă nedefinită, dacă raportul între viteza termică (v_T) și viteza de evadare (v_{II}) îndeplinește condiția: $(v_T/v_{II}) \leq 0,1$. Verificați această situație pentru metanul din atmosfera planetei Jupiter.

Se cunosc: masa Soarelui $M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg, masa Jupiter $M_J = 1,898 \cdot 10^{27}$ kg, semi-axa mare a traiectoriei lui Jupiter $a_J = 778,479 \cdot 10^6$ km, excentricitatea numerică a lui Jupiter $e_J = 0,0489$, densitatea medie a lui Jupiter $\rho_J = 1\,326$ kg/m³, raza medie a lui Jupiter $R_J = 69\,911$ km, perioada cometei Shoemaker-Levy 9, $T_{SL} = 2$ ani, excentricitatea numerică a cometei Shoemaker-Levy 9, $e_{SL} = 0,9986$, densitatea medie a cometei Shoemaker-Levy 9, $\rho_{SL} = 500$ kg/m³, constanta atracției universale $k = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm²kg⁻², 1 u.a. = $15 \cdot 10^7$ km, masa moleculară relativă a metanului $m_{CH_4} = 16$, temperatura medie a straturilor superioare ale atmosferei lui Jupiter $t_J = -110$ °C, constanta generală a gazelor $R = 8,31$ J/(mol·K), viteza luminii în vid $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Se poate utiliza aproximația binomială: $(1 + x)^\alpha \cong 1 + \alpha x$, dacă $x \ll 1$.