

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a VI-a

1. a) (3p) Determinați numerele naturale prime a și b care satisfac condiția $3a + b = 60$.
b) (4p) Dacă a și b sunt numere naturale nenule și $3a + b = 60$, demonstrați că numărul $a \cdot 3^{2n+2} - 2a \cdot 3^{2n+1} + b \cdot 3^{2n}$ este divizibil cu 5.

Prof. Moscaliuc Dumitru

Soluție:

- a) $3a, 60 : 3 \Rightarrow b : 3$, b număr prim $\Rightarrow b = 3$. Obținem $a = 19$.
b) $a \cdot 3^{2n+2} - 2a \cdot 3^{2n+1} + b \cdot 3^{2n} = 3^{2n} (9a - 6a + b) = 3^{2n} (3a + b) = 3^{2n} \cdot 60$. Cum $60 : 5 \Rightarrow$ numărul dat este divizibil cu 5.

Barem

a) $3a, 60 : 3 \Rightarrow b : 3$	1p
b număr prim $\Rightarrow b = 3$	1p
$a = 19$	1p
b) $a \cdot 3^{2n+2} - 2a \cdot 3^{2n+1} + b \cdot 3^{2n} = 3^{2n} (9a - 6a + b)$	2p
$= 3^{2n} (3a + b) = 3^{2n} \cdot 60$	1p
$60 : 5 \Rightarrow$ numărul dat este divizibil cu 5	1p

2. Un număr alcătuit din 1236 de cifre este scris cu cifrele 1, 2, 3 și cu 12 cifre de 0. Numărul de apariții al cifrelor 1, 2 și 3 este direct proporțional cu 1, 2 și respectiv 3.

- a) (4p) Calculați suma cifrelor numărului.
b) (3p) Demonstrați că numărul dat nu este pătrat perfect.

Prof. Timofti Liliana

Soluție:

- a) Fie a, b și respectiv c numărul de apariții al cifrelor 1, 2 și 3.

Avem: $a = k, b = 2k, c = 3k$, unde $a + b + c = 1224 \Rightarrow k = 204, a = 204, b = 408, c = 612$.

Fie n numărul dat. Suma cifrelor numărului n este $204 \cdot 1 + 408 \cdot 2 + 612 \cdot 3 = 204(1 + 4 + 9) = 204 \cdot 14 = 2856$.

- b) Observăm că $(204 \cdot 14) : 3$, dar $(204 \cdot 14) \nmid 9$, deci $n : 3$ și $n \nmid 9$. Așadar n nu este pătrat perfect.

Barem

a)	$a = k, b = 2k, c = 3k$	1p
	$a + b + c = 1224 \Rightarrow k = 204, a = 204, b = 408, c = 612$.	2p
	Suma cifrelor numărului n este $204 \cdot 1 + 408 \cdot 2 + 612 \cdot 3 = 204(1 + 4 + 9) = 204 \cdot 14 = 2856$.	1p
b)	$(204 \cdot 14) : 3$, dar $(204 \cdot 14) \nmid 9$	1p
	$n : 3$ și $n \nmid 9 \Rightarrow n$ nu e pătrat perfect	2p

3. (7p) Se consideră unghiurile $\angle AOB$, $\angle BOC$ și $\angle BOD$ astfel încât $\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt adiacente și suplementare, iar $\angle AOB$ și $\angle BOD$ sunt neadiacente complementare. Dacă $\angle COD = 135^\circ$, determinați măsura unghiului AOB .

Gazeta Matematică Nr.11/2018

Soluție:

Notăm $\angle AOB = x$, $\angle BOC = y$ și $\angle BOD = z$.

$\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt adiacente și suplementare $\Rightarrow$

$$x + y = 180^\circ.$$

$\angle AOB$ și $\angle BOD$ sunt neadiacente complementare $\Rightarrow$

$$x + z = 90^\circ \text{ și } (OD \subset \text{Int } \angle AOB \text{ sau } (OA \subset \text{Int } \angle DOB).$$

Adunând cele două relații obținem $2x + y + z = 270^\circ$.

Dacă $(OD \subset \text{Int } \angle AOB$, atunci

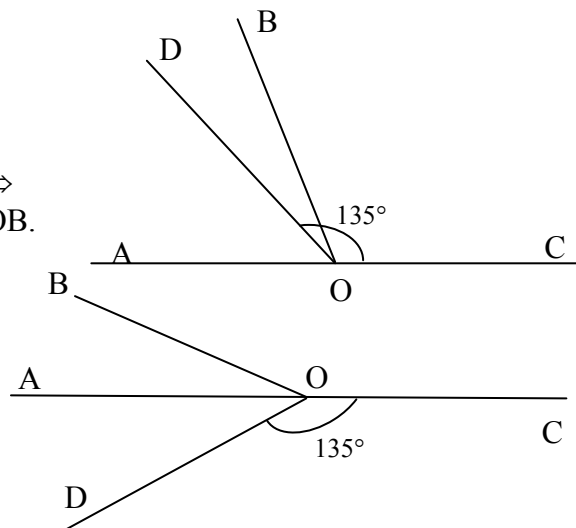
$$\angle COD = \angle BOC + \angle BOD \Rightarrow y + z = 135^\circ$$

$$\Rightarrow 2x = 135^\circ \Rightarrow x = 67^\circ 30'.$$

Dacă $(OA \subset \text{Int } \angle DOB$, atunci

$$y + z + 135^\circ = 360^\circ, \text{ de unde } y + z = 225^\circ \Rightarrow$$

$$2x = 45^\circ \Rightarrow x = 22^\circ 30'.$$



Barem

Realizarea desenului	1p
$x + y = 180^\circ$ și $x + z = 90^\circ \Rightarrow 2x + y + z = 270^\circ$	1p
$\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt adiacente suplementare, iar $\angle AOB$ și $\angle BOD$ sunt neadiacente complementare $\Rightarrow \angle AOB < 90^\circ$ și $(OD \subset \text{Int } \angle AOB \text{ sau } (OA \subset \text{Int } \angle DOB$	1p
Dacă $(OD \subset \text{Int } \angle AOB$, atunci $\angle COD = \angle BOC + \angle BOD \Rightarrow y + z = 135^\circ \Rightarrow 2x = 135^\circ \Rightarrow x = 67^\circ 30'$	2p
Dacă $(OA \subset \text{Int } \angle DOB$, atunci $y + z + 135^\circ = 360^\circ$, de unde $y + z = 225^\circ \Rightarrow 2x = 45^\circ \Rightarrow x = 22^\circ 30'$	2p

4. Fie triunghiul dreptunghic $\triangle ABC$ cu $\angle A = 90^\circ$, $AD \perp BC$, $D \in BC$ și punctele M , N situate pe segmentul BC astfel încât $\angle MAB \equiv \angle AMB$ și $\angle NAC \equiv \angle ANC$.

a) (4p) Calculați măsura unghiului MAN .

b) (3p) Dacă $AB < AC$ arătați că $\angle BAN < \angle CAM$.

Prof. Sascău Gabriela

Soluție:

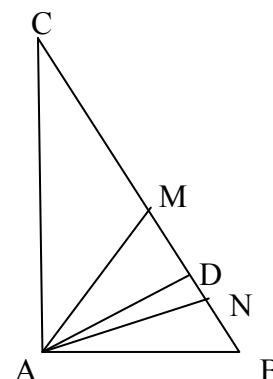
a) Notăm $\angle MAB = \angle AMB = x$ și $\angle NAC = \angle ANC = y$.

În $\triangle MAB$: $\angle B = 180^\circ - 2x$, iar în $\triangle NAC$: $\angle C = 180^\circ - 2y$.

Deci $\angle B + \angle C = 360^\circ - 2(x + y) = 90^\circ$, de unde $x + y = 135^\circ$.

În $\triangle MAN$: $\angle MAN = 180^\circ - (x + y) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

b) Dacă $AB < AC \Rightarrow \angle C < \angle B \Rightarrow 180^\circ - 2y < 180^\circ - 2x \Rightarrow x < y$, deci $\angle MAB < \angle NAC$. Scăzând măsura unghiului $\angle MAN$, obținem $\angle MAB - \angle MAN < \angle NAC - \angle MAN$, deci $\angle BAN < \angle CAM$.



Barem

a) Realizarea desenului	1p
$\sphericalangle B = 180^\circ - 2x$ și $\sphericalangle C = 180^\circ - 2y$.	1p
Determinarea sumei $x + y = 135^\circ$	1p
$\sphericalangle MAN = 180^\circ - (x + y) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$	1p
b) $AB < AC \Rightarrow \sphericalangle C < \sphericalangle B \Rightarrow 180^\circ - 2y < 180^\circ - 2x \Rightarrow x < y \Rightarrow \sphericalangle MAB < \sphericalangle NAC$	2p
$\sphericalangle MAB - \sphericalangle MAN < \sphericalangle NAC - \sphericalangle MAN \Rightarrow \sphericalangle BAN < \sphericalangle CAM$	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.