



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013



CLASA a X -a

PROBLEMA 1. Fie $a \in (0,1)$ și $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n^2 = 0.$$

Demonstrați inegalitatea

$$\log_a \left(\sum_{i=1}^n a^{x_i} \right) \leq \log_a n + \frac{1}{4n}.$$

Prof. Sorin Ulmeanu

PROBLEMA 2. Demonstrați că valoarea expresiei

$$\frac{\sqrt{n+\sqrt{0}} + \sqrt{n+\sqrt{1}} + \dots + \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}} + \sqrt{n+\sqrt{n^2}}}{\sqrt{n-\sqrt{0}} + \sqrt{n-\sqrt{1}} + \dots + \sqrt{n-\sqrt{n^2-1}} + \sqrt{n-\sqrt{n^2}}}$$

este constantă pentru orice numere întregi pozitive.

Olimpiada Filipine

PROBLEMA 3. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ distincte astfel încât $|a| = |b| = |c| = 2013$ și

$$a + b + c = a^4 + b^4 + c^4$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^8 + b^8 + c^8$$

Demonstrați că $a + b + c = 0$.

Prof. univ. Cristinel Mortici

PROBLEMA 4. Fie a, b numere reale și z complex nereal astfel încât

$$|a - b| = |a + b - 2z|.$$

a) Să se arate că ecuația $|z - a|^x + |\bar{z} - b|^x = |a - b|^x$, cu necunoscuta reală x , are o singură soluție.

b) Să se rezolve inecuația $|z - a|^x + |\bar{z} - b|^x \leq |a - b|^x$ cu necunoscuta reală x .

G.M.10-2012

Subiect selectat de prof. Constantin Drugan

NOTA. Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.