BAREM DE CORECTARE

etapa locală - 16 februarie 2014

Clasa a XI- a

SUBIECTUL 1 -7p.

3p a)Demonstrăm prin inducție matematică.

Etapa I-verificăm relația pentru n=1, folosind relațiile: $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ și $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ **1p**

Etapa a-II-a presupunem că $A^k=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_k} & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$, unde $a_k=(1+\cos^k 2x)/2$ și $b_k=(1-\cos^k 2x)/2$ și arătăm că

$A^{k+1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{k+1}} & b_{k+1} \\ b_{k+1} & a_{k+1} \end{pmatrix}$, unde $a_{k+1}=(1+\cos^{k+1} 2x)/2$ și $b_{k+1}=(1-\cos^{k+1} 2x)/2$, calculând $A^{k+1}=A^k \cdot A$, pentru orice k natural nenul **2p**

4p b) $\det(A^k)=\cos^k 2x, k\in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \det(A^k)=\cos 2x+\cos^2 2x+....+\cos^n 2x$ **1p**

Fie matricea $B=\sum_{k=1}^{n} A^k = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, unde $a=(n+\cos 2x+\cos^2 2x+....+\cos^n 2x)/2$ și

$b=(n-\cos 2x-\cos^2 2x-....-\cos^n 2x)/2$ **1p**

$\det(B)=a^2-b^2=n(\cos 2x+\cos^2 2x+.....+\cos^n 2x)$ **1p**

Limita cerută este 1/n **1p**

SUBIECTUL 2 -7p

4p a) Determinantul poate avea una din formele $D_1=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & a & \frac{1}{2}-a \\ \frac{1}{2}-a & \frac{1}{2} & a \\ a & \frac{1}{2}-a & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ sau

$D_2=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-a & a \\ a & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-a \\ \frac{1}{2}-a & a & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ **2p**

$D_1=D_2=3a^2-\frac{3a}{2}+\frac{1}{4}$ **1p**

$3a^2-\frac{3a}{2}+\frac{1}{4}>0, \forall a\in \mathbb{R}$ **1p**

3p b) $\min D_1=\min D_2=\min\left(3a^2-\frac{3a}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16}$,justificare **3p**

SUBIECTUL 3 -7p

2p a) $a_n= a_1 +(n-1)r$, $a_1>o$, $r> 0$ **1p**

lim $a_n= +\infty$ **1p**

5p b) Folosim Cesaro-Stolz și limita cerută este egală cu L =lim($\frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_{n+1}}}$)/($a_{n+1} – a_n$)

$= \frac{1}{r} \lim \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_{n+1}}}$ **2p**

Pentru noua limită aplicăm din nou Cesaro-Stolz și obținem $L = \frac{1}{r} \lim\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+2}}}$ **2p**

$L= \lim \frac{1}{\sqrt{a_{n+2}}} =0$ **1p**

SUBIECTUL 4 -7p

Fie $L=\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}$ (a $\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ +b $\sqrt{4+\frac{1}{x}}$ + c $\sqrt{9+\frac{1}{x}}$)

$\lim_{x\to\infty}$ (a $\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ +b $\sqrt{4+\frac{1}{x}}$ + c $\sqrt{9+\frac{1}{x}}$)= a+2b+3c **1p**

Dacă $a+2b+3c >0$, atunci $L=+\infty$ **1p**

Dacă $a+2b+3c <0$, atunci $L=- \infty$ **1p**

Dacă $a+2b+3c =0$, atunci $a=-2b-3c$ și

$L= \lim_{x\to\infty} b(\sqrt{4x+1} -2 \sqrt{x+1}) +\lim_{x\to\infty} c (\sqrt{9x+1} - 3\sqrt{x+1})$

$L= \lim_{x\to\infty} \frac{-3b}{\sqrt{4x+1}+2\sqrt{x+1}} + \lim_{x\to\infty} \frac{-8c}{\sqrt{9x+1}+3\sqrt{x+1}}$, de unde L=o **4p**