

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, 16 februarie 2019
Clasa a XII – a
VARIANTA 1

XII**SUBIECTE:**

1. Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat și numerele reale $a, b, c \in [n-1, n+1]$. Atunci demonstrați că
- $$n^3 - 1 \leq a \cdot b \cdot c - n \cdot (a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a) + n^2 \cdot (a + b + c) \leq n^3 + 1. \quad (7p)$$

Prof. Constantin Nicolau, Curtea de Argeș

2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f bijectivă și $q \in \mathbb{R}$ cu $f(q) = 2$. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „ $\circ$ ” prin: $a \circ b = f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b) - q)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție și simetricul lui $a \in \mathbb{R}$ în raport cu legea „ $\circ$ ”;

(3p)

b) Pentru $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ rezolvați ecuația: $x^2 \circ x = (6 - q)^3$

(4p)

Prof. Adrian Gobej, Curtea de Argeș

3. Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x + \cos x}{x^2 + \cos^2 x} dx$.

(7p)

Prof. Silviu Graure, Pitești

4. Fie $a > 1$. Calculați $I = \int \sin x \sqrt{a + \sin 2x} dx$; $x \in \mathbb{R}$

(7p)

Prof. Daniel Jînga, Pitești

O carte face cât un lingou de aur. Bani nu aduc învățătura, dar învățătura aduce bani.
(Proverbe românești)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaje cuprinse între 0-7 puncte.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.

Timp de lucru: 3 ore.