



Olimpiada națională de matematică

etapa locală

28.02.2015

Clasa a IX-a

1. Se consideră o mulțime $G \subset \mathbb{R}$ ce satisface simultan proprietățile:

a) $1 \in G$

b) $x \in G \Rightarrow \sqrt{x+2} \in G$

c) $\sqrt{x+3} \in G \Rightarrow x+4 \in G$

Arătați că $\sqrt{2015} \in G$ și $2014 \in G$.

2.

a) Arătați că $a + bc \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 1}{2}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$

b) $\frac{3(a^2 + b^2) + 2}{3(c + ab)} + \frac{3(b^2 + c^2) + 2}{3(a + bc)} + \frac{3(c^2 + a^2) + 2}{3(b + ac)} \geq 4, \forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$

3. Se dă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$ și relația $\frac{1^2}{a_1 \cdot a_2 + 1} + \frac{2^2}{a_2 \cdot a_3 + 1} + \dots + \frac{n^2}{a_n \cdot a_{n+1} + 1} = \frac{a_{n+1}}{8}, \forall n \geq 1$.

1. Aflați termenii șirului.

4. Fie $\triangle ABC$ și punctele $M \in (AB)$; $N \in (AC)$. Notăm $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = S$ și $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{AN}{NC} = P$, $S, P \in \mathbb{R}^*$.

Arătați că dreapta MN trece prin mijlocul medianei AD al $\triangle ABC$, $D \in (BC)$ dacă și numai dacă $S = 2P$.

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

SUCCESE!