

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 17 februarie 2023
Clasa a XI-a

1. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că:

$$\det(A + I_2) + \det(A - I_2) = \frac{1}{2023} \det(A^2 - I_2) + 2023 = 2.$$

Demonstraţi că $\det(A - 2023 \cdot I_2)$ este un număr întreg divizibil cu 2023.

Emanuel George Munteanu

2. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt două matrice pentru care matricea $A + B$ este inversabilă, demonstraţi că $A \cdot (A + B)^{-1} \cdot B = B \cdot (A + B)^{-1} \cdot A$.

R.M.T.

3. Determinaţi $a > 0$ ştiind că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, partea întreagă a numărului $(n^2 - n) \cdot (\sqrt[n]{a} - 1)$ este egală cu $n - 1$.

Gazeta Matematică

4. Fie I un interval şi funcţiile $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 0$.

(2) $|f(x) - f(y)| \leq |g(x - y)|, \forall x, y \in I, x > y$.

Deomnstraţi că:

(a) $|f(x) - f(y)| \leq n \cdot \left| g\left(\frac{x - y}{n}\right) \right| \forall x, y \in I, x > y, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Funcţia f este constantă pe intervalul I .

Romeo Ilie

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.