



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013



CLASA a XII-a

PROBLEMA 1. Fie G multimea matricilor de forma

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & \sqrt{1-x^2} & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in (-1, 1).$$

Demonstrați ca:

a) $A(x)A(y) = A\left(\frac{x+y}{1+xy}\right), \forall x, y \in (-1, 1).$

b) G are o structura de grup multiplicativ abelian.

c) $f: G \rightarrow \mathbb{R}, f(A(x)) = \ln \frac{x+1}{1-x}$ este un izomorfism de la $(G, \cdot)$

la $(\mathbb{R}, +).$

PROBLEMA 2. Fie $(M, \cdot)$ un monoid comutativ finit și e elementul neutru. Fie $A = \{f: M \rightarrow M \mid f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in M\}$. Sa se arate ca dacă pentru orice $f \in A$ avem $f(e) = e$, atunci monoidul este grup.

G.M.11/2012

PROBLEMA 3. Sa se calculeze:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{t^3 \sqrt{t+1} + \sqrt[3]{t^2(t+1)^2} + (t+1)\sqrt[3]{t}}.$$

Prof. Gorgota Vasile

PROBLEMA 4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a sa. Dacă

$$f(x) \geq \arctg|x|, (\forall) x \in \mathbb{R},$$

demonstrați ca există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x_0) = x_0$.

Prof. Anca Andrei

Subiect selectat de prof. Vasile Gorgotă

NOTA: Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.