

Olimpiada națională de matematică, faza locală, județul Caraș-Severin, 2016

Clasa a XI-a

- I. Se notează cu a, b, c lungimile laturilor unui triunghi, iar cu h_a, h_b, h_c lungimile înălțimilor și se

consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & h_a \cdot h_b \\ 1 & b & h_b \cdot h_c \\ 1 & c & h_c \cdot h_a \end{pmatrix}$. Arătați că $\det A \geq 0$. În ce condiții avem $\det A = 0$?

Lucian Dragomir, Supliment GM 12/2014

- II. Se consideră $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $\det(A - I_2) = 2$ și $\det(A + I_2) = 4$. Calculați $\det A$ și

$$\det(A - 2I_2).$$

RMCS 34

- III. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = x_n + \frac{4}{x_n}, n \geq 0, x_0 = 1$.

Calculați:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}$.

RMCS nr. 39

- IV. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$ și, pentru orice număr natural nenul n , se notează

$$a_n = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x \cdot \sin nx)^{f(x)}.$$

Calculați :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot (e^{x^2} - \cos 3x))$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$.

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.