

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a IX-a

Problema 1. Rezolvați ecuația $\left[\frac{3x^2+1}{3}\right] - \left[\frac{2x^2+1}{2}\right] + \left[\frac{3x^2+2}{3}\right] = 0$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

Luigi Catană, Potcoava

Problema 2. Demonstrați că pentru orice numere reale $x, y, z \geq 1$ are loc inegalitatea:

$$x \cdot (\sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}) + y \cdot (\sqrt{z-1} + \sqrt{x-1}) + z \cdot (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}) \leq x^2 + y^2 + z^2.$$

Florin Nicolaescu, Balș

Problema 3. Fie ABC un triunghi. Medianele AM , BN , CP taie cercul circumscris triunghiului ABC în punctele D , E , respectiv F . Știind că $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{PF} = \vec{0}$, arătați că triunghiul ABC este echilateral.

Gazeta Matematică nr. 12/2013

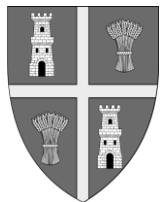
Problema 4. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale pozitive astfel încât $a_1 = 1$ și

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + a_n} = a_n - 1, \text{ pentru orice } n \geq 2.$$

Determinați partea întreagă a numărului $A_n = a_n a_{n+1} + a_n a_{n+2} + a_{n+1} a_{n+2}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Nelu Gerg, Slatina

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a X-a

Problema 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z^2 - z - 2}{z - 1}$.

Arătați că, dacă $z \neq 1$, atunci $f(z) \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $z \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Rezolvați sistemul
$$\begin{cases} \sqrt[4]{x\sqrt{x}} - \sqrt[4]{y\sqrt{y}} = 7 \\ \sqrt[14]{x\sqrt{x\sqrt{x}}} + \sqrt[14]{y\sqrt{y\sqrt{y}}} = 3 \end{cases}.$$

Gazeta Matematică nr. 9/2013

Problema 3. Determinați funcțiile $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ care satisfac condițiile

$$xy \lg(xy) \leq yf(x) + xf(y) \leq f(xy), \text{ pentru orice } x, y > 0.$$

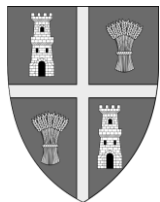
Problema 4. Se consideră funcția injectivă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că există $p \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(xy) = f(x)f(y) + p, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Arătați că $p = 0$.

b) Demonstrați că f este impară.

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a XI-a

Problema 1. Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^{\cos x} - \cos 2x}{x^2}$.

Florian Dumitrel, Slatina

Problema 2. Matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $I_2 + 3AB = 2BA$.
Arătați că $\det(AB - BA) = 0$.

Florin Nicolaescu, Balș

Problema 3. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$ și

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + \frac{n}{n+1}}, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Arătați că $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

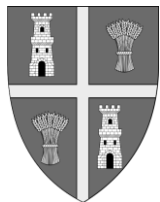
Florian Dumitrel, Slatina

Problema 4. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $\det A = 1$. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) $\det(A^2 - A + I_3) = 0$;
- b) $\det(A + I_3) = 6$ și $\det(A - I_3) = 0$.

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2013

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a XII-a

Problema 1. Calculați $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 + \sin 2x} dx$.

Florian Dumitrel, Slatina

Problema 3. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu $2n$ elemente și H un subgrup al său cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}^*$.
Arătați că $x^2 \in H$, pentru orice $x \in G$.

[***]

Problema 3. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit și H un subgrup propriu, necomutativ, al său. Arătați că există două elemente distincte din $G \setminus H$ care comută.

Gazeta Matematică nr. 9/2013

Problema 4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și strict crescătoare și $(c_n)_{n \geq 1}$ un șir mărginit de numere reale.

Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ dacă și numai dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x + c_n) dx = \int_0^1 f(x) dx$.

Florian Dumitrel, Slatina

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.