

Inspectoratul Școlar Județean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naționale de matematică
Clasa a X-a
Craiova, 9 februarie 2013

Problema 1.

Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $g \circ f$ este funcție injectivă și $f \circ g$ este funcție surjectivă. Să se arate că f și g sunt funcții bijective.

Problema 2.

Fie $a, b, c > 0$, numere reale cu $abc = 1$. Să se arate că

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq ab + bc + ac + a + b + c.$$

G. M. C: 2697

Problema 3.

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10.$$

Problema 4.

Dacă $z + \frac{1}{z} = 2 \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, să se calculeze $z^n + z^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 10;

Timp de lucru: 3 ore.

Etapa locală a Olimpiadei naționale de matematică
Clasa a X-a
Craiova, 9 februarie 2013
Soluții

Problema 1.

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$. Deducem că $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, iar cum $g \circ f$ este injectivă avem că $x_1 = x_2$. Așadar, f este injectivă.

Fie $y \in \mathbb{R}$. Din faptul că $f \circ g$ este surjectivă obținem că există $x' \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(g(x')) = y$. Așadar, există $x = g(x') \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$, deci f este surjectivă. În concluzie, f este bijectivă.

Fie $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $g(y_1) = g(y_2)$. Folosind faptul că f este surjectivă, deducem că există $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_1) = y_1$ și $f(x_2) = y_2$. Astfel, avem că $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, deci $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$. Am demonstrat astfel că g este injectivă.

Fie $x \in \mathbb{R}$ și fie $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Cum $f \circ g$ este surjectivă avem că există $x_1 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(g(x_1)) = y$, deci $f(g(x_1)) = f(x)$. Folosind injectivitatea lui f obținem că $g(x_1) = x$, adică g este surjectivă. În concluzie, f este bijectivă.

Problema 2.

Pentru că $abc = 1$, avem că două dintre numerele a, b, c sunt la fel așezate față de 1, fie acestea a și b . Obținem astfel că $(a - 1)(b - 1) \geq 0$, adică

$$ab + 1 \geq a + b.$$

Inmulțind ultima inegalitate cu c deducem că

$$1 + c \geq ac + bc.$$

În concluzie, va fi suficient să arătăm că

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 1 + c + ab + a + b + c.$$

Demonstrație se încheie pentru că ultima inegalitate se poate rescrie astfel

$$\left(a - \frac{b+1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b-1}{2}\right)^2 + (c-1)^2 \geq 0.$$

Problema 3.

Dacă vom nota prin $t = \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x$ ecuația

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$$

devine

$$t + \frac{1}{t} = 10.$$

Obținem rădăcinile

$$t_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6},$$

deci avem rădăcinile $x_{1,2} = \pm 2$.

Problema 4.

Rezolvând ecuația $z + \frac{1}{z} = 2 \cos(x)$ obținem că

$$z_{1,2} = \cos(x) \pm i \sin(x).$$

Deducem astfel că

$$z^n + z^{-n} = \cos(nx) + i \sin(nx) + \cos(nx) - i \sin(nx) = 2 \cos(nx).$$

Etapa locală a Olimpiadei naționale de matematică
 Clasa a X-a
 Craiova, 9 februarie 2013
 Barem de corectare

Problema 1.

Problema 1.

Oficiu	1p
Demonstrarea faptului că f este injectivă	2p
Demonstrarea faptului că f este surjectivă	2p
Demonstrarea faptului că g este injectivă	2p
Demonstrarea faptului că g este surjectivă	3p
Total	10p

Problema 2.

Oficiu	1p
Alegerea a două numere a și b astfel încât $(a - 1)(b - 1) \geq 0$	2p
Deducerea inegalității $1 + c \geq ac + bc$	2p
Reducerea inegalității la forma $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 1 + c + ab + a + b + c$	2p
Scrierea inegalității sub forma $(a - \frac{b+1}{2})^2 + 3(\frac{b-1}{2})^2 + (c - 1)^2 \geq 0$	3p
Total	10p

Problema 3.

Oficiu	1p
Considerarea notației $t = (\sqrt{5} + 2\sqrt{6})^x$	2p
Rescrierea ecuației sub forma $t + \frac{1}{t} = 10$	3p
Rezolvarea ecuației $t + \frac{1}{t} = 10$	2p
Deducerea rădăcinilor $x_{1,2} = \pm 2$	2p
Total	10p

Problema 4.

Oficiu	1p
Rezolvarea ecuației și deducerea soluțiilor $z_{1,2} = \cos(x) \pm i \sin(x)$	5p
Deducerea faptului că $z^n + z^{-n} = 2 \cos(nx)$	4p
Total	10p