

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 25.02.2023 –

CLASA A XI A

Subiecte

1. Aflați $X \in M_2(\mathbb{R})$ știind că $X^{2023} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ care verifică relațiile $X^4 + XY = I_2, X^2 + XY^2 = YXY + A$.

Prof. Gabriel Necula, Ploiești

3. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ dat de $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + a_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$;

b. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$.

Gazeta Matematică, 2022

4. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 2023$, $a_{n+1} = \left(1 + \sqrt[3]{a_n - 1}\right)^2$, $\forall n \geq 1$.

a. Demonstrați că șirul este convergent.

b. Determinați limita șirului $(a_n)_{n \geq 1}$.

Prof. Claudiu Militaru, Ploiești

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.