



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
15.02.2014

CLASA a IX-a

PROBLEMA 1. a) Demonstrați ca pentru orice a, b, x, y strict pozitive avem

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}.$$

b) Fie $t \in [0, 1]$. Demonstrați ca

$$\frac{t^2}{a^2 - t^2} \leq \frac{t}{a^2 - 1}, a > 1.$$

c) Fie x, y, z numere reale pozitive cu suma 1 și fie a real, $a > 1$. Sa se arate ca

$$\frac{27}{9a^2 - 1} \leq \frac{1}{a^2 - x^2} + \frac{1}{a^2 - y^2} + \frac{1}{a^2 - z^2} \leq \frac{3a^2 - 2}{a^2(a^2 - 1)}.$$

G.M.

PROBLEMA 2. Fie $a \in \mathbb{R}$ cu $0 \leq a < 1$. Demonstrați identitatea

$$\left[a \left(1 + \left[\frac{1}{1-a} \right] \right) \right] + 1 = \left[\frac{1}{1-a} \right]$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x .

PROBLEMA 3. Fie $ABCD$ un patrulater convex, O punctul de intersecție al diagonalelor, M un punct de pe segmentul AB și N un punct de pe segmentul CD . Să se arate că O, M, N sunt coliniare dacă și numai dacă

$$AM \cdot DN \cdot OB \cdot OC = BM \cdot CN \cdot OA \cdot OD.$$

PROBLEMA 4. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notăm cu $f(n)$ numărul perechilor (x, y) cu $x, y \in \mathbb{Z}$ și $|x^2 - y^2| = n$.

a) Calculați $f(2013)$.

b) Calculați $f(n)$ pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

NOTA: Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
15.02.2014

CLASA a X -a

PROBLEMA 1. Fie numerele $a_1, a_2, \dots, a_{2014} \in (0, \infty)$ și funcția

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a_1^x + a_2^x + \dots + a_{2014}^x$. Dacă $f(2014) = f(-2014) = 2014$, arătați că funcția f este constantă.

PROBLEMA 2.a) Arătați că $x^2 + y^2 \geq 2xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că dacă $a, b, c \in (0, 1)$ atunci are loc inegalitatea

$$\log_a \frac{4b}{b+4} + \log_b \frac{4c}{c+4} + \log_c \frac{4a}{a+4} \geq \frac{3}{2}.$$

Dragos Constantinescu

PROBLEMA 3. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ și mulțimea

$$A = \{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0, 1]\}.$$

a) Arătați că $\forall w \in A$ are loc inegalitatea $|z_1 + z_2 + z_3 - w| + |w| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$.

b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ cu $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ și orice

$w_1, w_2, \dots, w_n \in A$ are loc inegalitatea

$$\left| z_1 + z_2 + z_3 - \sum_{k=1}^n a_k z_k \right| + \sum_{k=1}^n a_k |w_k| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|.$$

N.Bourbacut

PROBLEMA 4.a) Dacă a, b, c, d sunt numere complexe de modul egal și $a + b + c + d = 0$ demonstrați că numerele sunt afixe ale vârfurilor unui dreptunghi.

b) Fie ABCD un patrulater înscris în cercul de rază 1. Fie G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, CDA, DAB, ABC. Să se arate că dacă $AG_1 + BG_2 + CG_3 + DG_4 = \frac{16}{3}$, atunci ABCD este dreptunghi.

G.M.

NOTA. Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
15.02.2014
CLASA a XI-a

Problema 1.

Dacă A, B, C, D sunt soluțiile ecuației matriciale $X^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ arătați că

$$A^{2013} + B^{2013} + C^{2013} + D^{2013} = O_2.$$

Problema 2.

Fie matricile $A, B \in M_2(\mathbb{R})$. Să se arate că :

(i) $\det(A+B) - \det(A) - \det(B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(AB).$

(ii) Dacă matricea A este inversabilă, atunci ecuația $\det(xA+B)=0$ are două soluții reale și distincte dacă și numai dacă are loc inegalitatea

$$(\det(A) - \det(B))^2 > \det(A+B) \cdot \det(A-B).$$

Problema 3.

Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+2^n} \right) = 0.$

Problema 4.

Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale definit prin $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ și

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}, n \geq 1. \text{ Să se calculeze } \lim_{n \rightarrow \infty} x_1 x_2 \dots x_n.$$

G.M.

NOTA: Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
15.02.2014
CLASA a XII-a

PROBLEMA 1. Fie multimea

$$K = \left\{ A(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ b & 2b & b \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Atunci $(K, +, \cdot)$ este corp.

PROBLEMA 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup și funcția $f: G \rightarrow G, f(x) = x^2$.

- a) Să se demonstreze că f este endomorfism al grupului G dacă și numai dacă $(G, \cdot)$ este grup abelian.
- b) Dacă grupul G este comutativ și are un număr impar de elemente, să se demonstreze că funcția f este un automorfism al grupului G .

PROBLEMA 3. Fie sirul de termen general

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} (tg^{n-1}x + tg^n x + tg^{n+1}x) dx, n \geq 1.$$

Sa se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n^2]{n I_n} - 1 \right)$.

PROBLEMA 4. Să se determine funcțiile $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică

simultan condițiile:

- i) f este crescătoare;
- ii) f admite o primitivă F cu proprietatea că $F(0) = 0$ și $F(x+y) \leq F(x) + F(y), \forall x, y \in [0, \infty)$.

NOTA: Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.