

Etapa locală, Craiova, 9 februarie 2013

Clasa a VI-a

Problema 1.

Oficiu	1p
$p = (a, b) \Rightarrow a = pa_1, b = pb_1, (a_1, b_1) = 1, a_1 < b_1$	1p
$a \cdot b = [a, b] \cdot (a, b), 20 \cdot (a, b) = [a, b] \Rightarrow 20p = \frac{pa_1 \cdot pb_1}{p} \Rightarrow a_1 b_1 = 20$	2p
$a_1 b_1 = 20, (a_1, b_1) = 1, a_1 < b_1 \Rightarrow a_1 = 1, b_1 = 20$ sau $a_1 = 4, b_1 = 5$	2p
I. $a_1 = 1, b_1 = 20$ nu convine	1p
II. $a_1 = 4, b_1 = 5$	
$(a, b) = p$ prim, a, b de două cifre $\Rightarrow 2 \leq p < 20 \Rightarrow p \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$	1.5p
Soluția: $a = 12, b = 15; a = 20, b = 25; a = 28, b = 35; a = 44, b = 55; a = 52, b = 65;$ $a = 68, b = 85; a = 76, b = 95$	1.5p
Total	10p

Problema 2.

Oficiu	1p
Fie $n, n + 1, \dots, n + 99$ cele 100 de numere consecutive, $n \in \mathbb{N}$	1p
$S = n + (n + 1) + \dots + (n + 99) = 50(2n + 99)$	3p
$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \mid S \Rightarrow 21 = 3 \cdot 7 \mid (2n + 99)$	1p
$2n + 99 \geq 99$ și condiția de minim din ipoteza problemei $\Rightarrow 2n + 99 = 105$	2p
$n = 3 \Rightarrow$ numerele căutate sunt: 3,4,5,...100,101,102	2p
Total	10p

Problema 3.

Oficiu	1p
a). $A = \{5, 7, 11, 25\}$	1.5p
b). Fie X o mulțime cu cel puțin 5 elemente	
Elementele lui X împărțite la 3 dau resturile 0, 1, 2	1p
I. Trei elemente din X dau același rest	1p
Suma acestor trei elemente este divizibilă cu 3 și mai mare decât 3	1p
$\Rightarrow$ Suma celor trei elemente nu este număr prim $\Rightarrow X$ nu are proprietatea (P)	0.5p
II. Cel mult două elemente din X dau același rest	1p
$\Rightarrow$ există trei elemente ce dau resturile 0, 1, 2 la împărțirea cu 3	1p
Suma acestor trei elemente este divizibilă cu 3 și mai mare decât 3	1p
$\Rightarrow$ Suma celor trei elemente nu este număr prim $\Rightarrow X$ nu are proprietatea (P)	0.5p
Nu există X cu proprietatea (P) astfel încât $\text{card} X \geq 5$	0.5p
Total	10p

Problema 4.

Oficiu	1p
Fie S_1, S_2 suma distanțelor de la punctul A , respectiv B , la cele 2013 puncte	
a). Toate punctele sunt la stânga lui $A \Rightarrow S_1 < S_2$	2p
b). Toate punctele sunt la dreapta lui $B \Rightarrow S_1 > S_2$	2p
c). $M_1, \dots, M_i (1 \leq i \leq 2012)$ la stânga lui A și $M_{i+1}, \dots, M_{2013}$ la dreapta lui B	
$S_1 = AM_1 + AM_2 + \dots + AM_i + BM_{i+1} + BM_{i+2} + \dots + BM_{2013} + (2013 - i)AB$	1.5p
$S_2 = AM_1 + AM_2 + \dots + AM_i + BM_{i+1} + BM_{i+2} + \dots + BM_{2013} + i \cdot AB$	1.5p
Dacă $S_1 = S_2 \Rightarrow (2013 - i)AB = i \cdot AB$	1p
$i = \frac{2013}{2}$ imposibil $\Rightarrow S_1 \neq S_2$	1p
Total	10p