

Barem cls. a X-a

Notă. Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim din barem pentru enunțul respectiv .

1. Folosind inegalitatea $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ rezultă $\log_a \frac{b+c}{2} \geq \frac{1}{2}(\log_a b + \log_a c)$

.....2 p

Scriind celelalte două inegalități , adunându-le și folosind inegalitatea

$\log_b a + \log_a b \geq 2$ rezultă

$\log_a \frac{b+c}{2} + \log_b \frac{a+c}{2} + \log_c \frac{a+b}{2} \geq \frac{1}{2}(\log_a b + \log_b a + \log_b c + \log_c b + \log_c a + \log_a c) \geq 3$5 p

2. a) $|u - z| = |z - u| = |\overline{z} - \overline{u}| = |\overline{z} - \overline{u}| = \left| \frac{1}{z} - \overline{u} \right| = \left| \frac{1 - z\overline{u}}{z} \right| = \frac{|1 - z\overline{u}|}{|z|} =$

$|1 - z\overline{u}|$, unde am folosit că $z\overline{z} = |z|^2 = 1$ 4 p

b) Folosind inegalitatea $|a - b| \leq |a| + |b|$, $|1 + z| + |1 + z^2| \geq$

$\geq |(1 + z) - (1 + z^2)| = |z - z^2| \geq |z(1 - z)| = |z| \cdot |1 - z| = |1 - z|$3 p

3. a) $f(\sqrt{2}) = 2 - [\sqrt{2}] = 1$ 2 p

b) De exemplu, $f(\sqrt{3}) = [\sqrt{6}] - [\sqrt{3}] = 2 - 1 = 1$ și $f(\sqrt{2}) = f(\sqrt{3})$3 p

c) Pentru $n \in \mathbb{Z}$, $f(x) = n \Leftrightarrow [x\sqrt{2}] = [x] + n = [x + n]$. Pentru $x\sqrt{2} = x + n$ se verifică, adică $x(\sqrt{2} - 1) = n$ și $x = \frac{n}{\sqrt{2}-1} = n(\sqrt{2} + 1)$2 p

4.a) $z^7 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$2 p

b) $z^7 - 1 = 0$, $(z - 1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$, $z \neq 1$, deci

$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, sau $u + v + 1 = 0$3 p

c) $uv = z^4 + z^5 + z^6 + 3z^7 + z^8 + z^9 + z^{10}$ și din $z^7 = 1$ rezultă

$uv = z^4 + z^5 + z^6 + 3 + z + z^2 + z^3 = u + v + 3 = -1 + 3 = 2$2 p

