

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

18 februarie 2018

CLASA a VII-a

1. a) (4p) Determinați numărul n pentru care are loc egalitatea:

$$\left(\frac{7}{9} + \frac{77}{99} + \frac{777}{999}\right)^2 : \frac{7}{9} - \frac{111}{200} : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{20} + \frac{1}{200}\right)^n = 6.$$

b) (3p) Dacă $a = \frac{2}{\sqrt{7}} + \frac{3}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{35}}$ și $b = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{35} + \sqrt{21}}$, arătați că $\frac{a+b}{\sqrt{7}}$ este un număr natural.

2. a) (3p) Dacă n este multiplu de 5, arătați că numărul $\sqrt{2018 - n^2}$ este irațional.

b) (4p) Arătați că oricare ar fi numărul întreg x pentru care $2018 - x^2 \geq 0$, numerele $a = \sqrt{2018 - x^2}$ și $b = \sqrt{2018 + x^2}$ nu sunt simultan numere raționale.

3. (7p) Triunghiul ABC este triunghi ascuțitunghic, punctele D , E și F sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, respectiv $[AC]$, iar $[BP]$ este înălțime a triunghiului. Demonstrați că triunghiurile DEF și DEP sunt congruente.

4. Se consideră patrulaterul ortodiagonal $ABCD$, $AC \perp BD$, $AC \cap BD = \{O\}$, $m(\angle ADC) = 90^\circ$, $[AC] \equiv [BD] \equiv [BC]$ și E piciorul perpendicularei din D pe BC , cu $E \in (BC)$. Demonstrați că:

a) (4p) patrulaterul $CDOE$ este trapez isoscel;

b) (3p) Q este mijlocul lui $[AC]$, unde $\{Q\} = DE \cap AC$.

Notă: **1. Toate subiectele sunt obligatorii.**

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.