

Soluție la problema 1 : Rezistor “Ping-pong”

A. Soluție

Din relația $\lambda = \frac{c}{f}$ rezultă $f = \frac{c}{\lambda}$

Corespunzător

$$f = \frac{3 \times 10^8}{179 \times 10^{-12}} = 1,67 \times 10^{18} \text{ Hz}$$

În consecință

$$\wp = \frac{f}{(Z-1)^2}$$

$$\wp = \frac{1,67 \times 10^{18}}{(26)^2} = 2,47 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

Pentru elemente cu numere atomice diferite,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{(Z_2-1)^2}{(Z_1-1)^2}$$

Pentru cazul considerat,

$$\begin{cases} \lambda_{Fe} = \lambda_{Co} \left(\frac{26}{25} \right)^2 \\ \lambda_{Ni} = \lambda_{Co} \left(\frac{26}{27} \right)^2 \end{cases}$$

Adică

$$\begin{cases} \lambda_{Fe} = 179 \left(\frac{26}{25} \right)^2 = 194 \text{ pm} \\ \lambda_{Ni} = 179 \left(\frac{26}{27} \right)^2 = 166 \text{ pm} \end{cases}$$

Electronii care trebuie să excite linia K_α a nichelului trebuie să aibă cel puțin energia fotonilor de raze X emiși.

Tensiunea de accelerare a unor astfel de electroni ar fi

$$U = \frac{hc}{\lambda e}$$

$$U = \frac{6,6 \times 10^{-34} \cdot 3 \times 10^8}{166 \times 10^{-12} \cdot 1,6 \times 10^{-19}} = 7,45 \text{ kV}$$

Dacă această tensiune de accelerare este depășită și nu se observă apariția liniei nichelului, anodul nu conține nichel

B.

(a) Așa cum este bine cunoscut, între plăcile unui condensator plan aflate la distanța d una de alta se stabilește un câmp electrostatic a cărei intensitate E este corelată cu diferența de potențial V dintre armături prin relația

$$E = \frac{V}{d} \quad (\text{Error! No text of}$$

specified style in document..1)

Din motive de simetrie, câmpul generat de fiecare dintre plăci va avea intensitatea E'

$$E' = \frac{E}{2} = \frac{V}{2 \cdot d} \quad (\text{Error! No text of}$$

specified style in document..2)

Capacitatea C a condensatorului având discuri ca armături este

$$C = \epsilon_0 \frac{\pi \cdot R^2}{d} \quad (\text{Error! No text of}$$

specified style in document..3)

Sarcina Q de pe fiecare armătură atunci când condensatorul are armăturile la diferența de potențial V este

$$Q = C \cdot V \quad (\text{Error! No text of}$$

specified style in document..4)

Forța F_R care acționează asupra unei plăci încărcate cu sarcina Q se datorește acțiunii câmpului electric generat de cealaltă placă asupra acestei sarcini. Forța este atractivă și are direcția perpendiculară pe plăcile condensatorului

$$F_R = \frac{Q \cdot V}{2 \cdot d} = \frac{C \cdot V^2}{2 \cdot d} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{V^2}{d^2} \cdot \pi \cdot R^2 \quad (\text{Error! No}$$

text of specified style in document..5)*

(b) Atunci când se află pe armătura condensatorului, micul disc cu grosimea neglijabilă poate fi considerat parte a armăturii. Sarcina este distribuită pe disc cu aceeași densitate ca și pe armătură. Sarcina q de pe disc este proporțională cu aria sa

$$\frac{q}{Q} = \frac{\pi \cdot r^2}{\pi \cdot R^2}$$

(**Error! No text of**

specified style in document..6)

și deci

$$\begin{cases} q = \frac{r^2}{R^2} \cdot Q = \frac{r^2}{R^2} \cdot C \cdot V = \frac{r^2}{R^2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{d} \cdot V \\ q = \epsilon_0 \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{d} \cdot V \\ \chi = \epsilon_0 \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{d} \end{cases} \quad (\text{ **Error! No** }$$

text of specified style in document..7)*

(c) Forța totală F_{total} care acționează asupra discului mic în momentul desprinderii sale este suma dintre greutatea sa acționând vertical în jos și având modulul $G = m \cdot g$ și forța de atracție a plăcii superioare $F_{electric} = q \cdot E'$ acționând vertical în sus

$$F_{total} = q \cdot E' - m \cdot g = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{V^2}{d^2} \cdot \pi \cdot r^2 - m \cdot g = \frac{\chi}{2 \cdot d} \cdot V^2 - m \cdot g \quad (\text{ **Error! No** }$$

text of specified style in document..8)

Pentru ca discul să leviteze trebuie ca

$$F_{total} \geq 0 \quad (\text{ **Error! No text of** }$$

specified style in document..9)

Diferența minimă de potențial la care apare levitația este

$$\begin{cases} \frac{\chi}{2 \cdot d} \cdot V_{th}^2 - m \cdot g = 0 \\ V_{frag} = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g \cdot d}{\chi}} \end{cases} \quad (\text{ **Error! No** }$$

text of specified style in document..10)*

(d) Plecând de jos cu sarcina q , sub acțiune combinată a respingerii datorate plăcii inferioare și a atracției datorate plăcii superioare, discul mic va ceda această sarcină în momentul în care atinge placa de sus încărcându-se instantaneu cu sarcina $-q$. Imediat după contactul cu armătura superioară discul va fi atras de armătura de jos, și respins de armătura de sus. În cursul mișcării sale, discul câștigă energie datorită acțiunii câmpului electrostatic și pierde energie datorită ciocnirilor. La o tură completă (jos – sus - jos) energia potențială gravitațională este invariabilă. Dacă s-a atins starea staționară,

câștigul de energie datorat interacțiunii cu câmpul electrostatic trebuie consumat la ciocniri.

Expresia energiei cinetice a discului este

$$E = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (\text{Error! No text of}$$

specified style in document..11)

Ținând seama de expresia coeficientului de restituție

$$\eta = \frac{v_{dupa}}{v_{inainte}} \quad (\text{Error! No text of}$$

specified style in document..12)

la fiecare ciocnire, pierderea de energie cinetică are expresia

$$\Delta E = E_{inainte} - E_{dupa} = (1 - \eta^2) \cdot E_{inainte} = \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right) \cdot E_{dupa} \quad (\text{Error! No}$$

text of specified style in document..13)

La fiecare trecere de la o armătură la alta, energia potențială electrostatică a discului crește cu cantitatea

$$\Delta U = q \cdot V \quad (\text{Error! No text of}$$

specified style in document..14)

Dacă energia cinetică staționară a discului imediat după ciocnirea cu placa de jos are valoarea

$$E_{jos} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{jos}^2 \quad (\text{Error! No text of}$$

specified style in document..15)

la ciocnirea cu armătura de jos, discul a pierdut energia

$$\Delta E_{jos} = \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right) \cdot E_{jos} . \quad (\text{Error! No}$$

text of specified style in document..16)

Energia totală a discului exact înaintea ciocnirii de placa de sus va fi

$$E_{sus} = E_{jos} - m \cdot g \cdot d + q \cdot V \quad (\text{Error! No text of}$$

specified style in document..17)

La ciocnirea de placa de sus energia discului scade cu

$$\Delta E_{sus} = (1 - \eta^2)(E_{jos} - m \cdot g \cdot d + q \cdot V)$$

(**Error! No text of**

specified style in document..18)

Pierderile de energie la cele două ciocniri sunt compensate – în regim staționar – de câștigul de energie de la câmpul electrostatic

$$\begin{cases} \Delta E_{sus} + \Delta E_{jos} = 2 \cdot q \cdot V \\ \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right) \cdot E_{jos} + (1 - \eta^2)(E_{jos} - m \cdot g \cdot d + q \cdot V) = 2 \cdot q \cdot V \\ E_{jos} = \frac{\eta^2}{1 - \eta^4} [(1 + \eta^2)qV + (1 - \eta^2)mgd] \\ E_{jos} = \frac{\eta^2}{1 - \eta^2} qV + \frac{\eta^2}{1 + \eta^2} mgd \end{cases}$$

(**Error! No**

text of specified style in document..19)

Deoarece

$$E_{jos} = \frac{1}{2} m v_{jos}^2,$$

(**Error! No text of**

specified style in document..20)

prin combinarea celor două expresii ale energiei E_{jos} rezultă

$$\begin{cases} v_{jos} = \sqrt{\left(\frac{\eta^2}{1 - \eta^2} qV + \frac{\eta^2}{1 + \eta^2} mgd \right) \cdot \frac{2}{m}} \\ v_{jos} = \sqrt{\left(\frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \frac{2\chi}{m} V^2 + \frac{2 \cdot \eta^2}{1 + \eta^2} gd \right)} \end{cases}$$

(**Error! No**

text of specified style in document..21)

Comparând ultima relație din (1.21) cu relația

$$v_{jos} = \sqrt{\alpha \cdot V^2 + \beta}$$

(**Error! No**

text of specified style in document..22)

rezultă

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\eta^2}{1-\eta^2} \frac{2\chi}{m} \\ \beta = \frac{2 \cdot \eta^2}{1+\eta^2} g d \end{cases}$$

(**Error! No**

text of specified style in document..23)*

Rezolvare problema de termodinamica baraj
20 Aprilie 2006

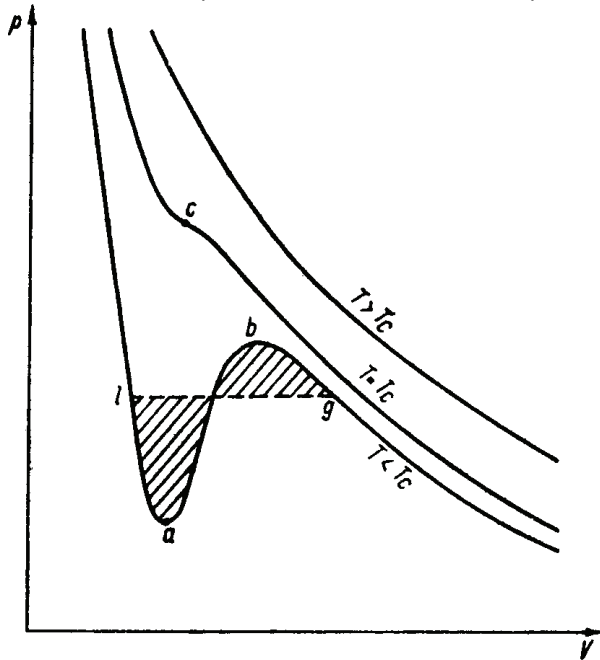
a) Inlocuind $v = \frac{1}{n}$ in ecuatie (1) din enunt se obtine:

$$(p + an^2) \left(\frac{1}{n} - b \right) = kT$$

sau

$$p(n, T) = \frac{nkT}{1 - nb} - an^2$$

Graficul cerut (obtinut evident calitativ) este cel din figura.



b) Explicatii conform manualelor sau

cartilor de specialitate. De exemplu:

La temperaturi foarte mari si densitati foarte mici, presiunea variaza liniar cu densitatea.

La densitati mari fortele de respingere determina o marire a presiunii gazului real fata de cea a gazului perfect si prin urmare exista abateri de la legea liniara a gazului perfect.

Pentru un domeniu foarte mic de valori ale temperaturii si densitatii fortele de atractie pot produce o micsoare brusca a presiunii ceea ce explica existenta unei portiuni liniare a curbei $p = p(n, T = \text{const})$. Pe acest palier densitatea variaza intre n_g si n_l .

Pentru tranzitia lichid-solid nu se pune problema unei temperaturi critice.

c) In punctul critic (punct de inflexiune) derivatele de ordinul unu si doi sunt nule:

$$\left(\frac{\partial p(n, T)}{\partial n} \right)_{T=T_c} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 p(n, T)}{\partial n^2} \right)_{T=T_c} = 0$$

d) Derivand () in raport cu n si tinand cont de () se obtin valorile cerute:

$$p_c = \frac{a}{27b^2}, \quad n_c = \frac{1}{3b}, \quad T_c = \frac{8a}{27bk}$$

e) Logaritmand $f(\varepsilon)$ dat in text se obtine la limita verificarea ceruta.

f) Se inlocuiesc in () expresiile din enunt si se obtine usor:

$$\tilde{p}(\tilde{n}, \tilde{T}) = \frac{8\tilde{n}\tilde{T}}{3-\tilde{n}} - 3\tilde{n}^2$$

Se observa ca ecuatia () nu contine constante caracteristice sistemului fizic si este valabila pentru orice gaz de tip van der Waals; aceasta ecuatie se mai numeste legea starilor corespondente.

g) Inlocuind corespunzator expresiile din enunt in ecuatia starilor corespondente se obtine:

$$P(r, \varepsilon) = \frac{-3r^3 + 8\varepsilon(r+1)^2}{2\left(1 + \frac{7r}{2} + 4r^2 + \frac{3r^3}{2}\right)}$$

In cazul izotermei critice evident $\varepsilon = 0$ iar $r \ll 1$ si avem:

$$P(r) \approx \frac{-3r^3}{2} \left(1 - \frac{7r}{2} + \dots\right)$$

h) In vecinatatea punctului critic putem dezvolta in serie derivata in jurul valorilor critice V_c si T_c ; vom tine cont de asemenea ca derivata trebuie sa fie negativa conform graficului reprezentat la punctul a) si in plus in punctul critic derivatele de ordinul un si doi sunt nule conform conditiilor deduse la punctul c). Prin urmare primii termeni importanti sunt:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \approx -\lambda(V-V_c)^2 - \theta(T-T_c), \quad \lambda > 0, \quad \theta > 0$$

i) Conform conditiei Maxwell ariile hasurate din figura de la punctul a) trebuie sa fie egale. Aceasta conditie permite utilizarea ecuatiei van der Waals pentru descrierea corecta a lichefierii gazului. Portiunile cu maxim si minim din grafic sunt inlocuite cu un segment orizontal care sa asigure egalitatea ariilor mentionate. Prin urmare

$$\int_l^g V dp = \int_l^g (V - V_c) dp = \int_l^g (V - V_c) \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV = 0$$

Aceasta este posibil pentru ca $\int_l^g V_c dp = 0$. Inlocuind in () dezvoltarea () obtinem:

$$\int_l^g (V - V_c) \left[-\lambda(V - V_c)^2 - \theta(T - T_c) \right] dV = 0$$

Dupa integrare se obtine

$$-\lambda \left[\frac{(V_g - V_c)^4}{4} - \frac{(V_l - V_c)^4}{4} \right] - \theta(T - T_c) \left[\frac{(V_g - V_c)^2}{2} - \frac{(V_l - V_c)^2}{2} \right] \equiv 0$$

si de aici rezulta clar ca

$$V_g - V_c = -(V_l - V_c)$$

deoarece $V_g > V_c$ si $V_l < V_c$ conform figurii de la punctul a).

j) Evident $\int_l^g dp = 0$. Introducem in expresia precedenta dezvoltarea () si obtinem:

$$\int_l^g dp = \int_l^g \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T dV = \int_l^g \left[-\lambda (V - V_c)^2 - \theta (T - T_c) \right] dV = 0$$

Integrand relatia precedenta, tinand cont de () si de definitia lui ε din enunt obtinem relatia ceruta.

Soluție:

În fibra optică lumina se propagă cu viteza $c' = \frac{c}{n}$ și are lungimea de undă $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$, unde λ reprezintă lungimea de undă corespunzătoare, în vid.

a. Intervalul de timp după care fasciculul care se propagă prin fibra optică, în sensul acelor de ceasornic revine prima dată în P se determină din relația

$$t^+ = \frac{2\pi R + R\Omega t^+}{c'} \quad (1)$$

obținându-se

$$t^+ = \frac{2\pi R}{c' \left(1 - \frac{R\Omega}{c'}\right)} \quad (2)$$

Analog, intervalul de timp după care fasciculul care se propagă prin fibra optică, în sensul invers acelor de ceasornic revine prima dată în P se determină din relația

$$t^- = \frac{2\pi R - R\Omega t^-}{c'} \quad (3)$$

și se obține

$$t^- = \frac{2\pi R}{c' \left(1 + \frac{R\Omega}{c'}\right)} \quad (4)$$

Astfel intervalului de timp $\Delta t = t^+ - t^-$ se exprimă prin relația

$$\Delta t \cong \frac{4\pi R^2 \Omega}{(c')^2} \quad (5)$$

în care s-a avut în vedere că $(R\Omega)^2 \ll c^2$

b. Expresia diferenței de drum optic (ΔL) dintre cele două fascicule care se propagă în sensuri opuse prin fibra optică, în condițiile precizate la punctul a este

$$(\Delta L) = c' \Delta t \cong \frac{4\pi R^2 \Omega}{c'} \quad (6)$$

$$(\Delta L) \cong 4,5 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad (7)$$

c. Diferența de fază $\Delta\varphi$ dintre cele două fascicule de lumină, ce se propagă prin fibra optică în sensuri opuse, în situația când acestea parcurg o singură dată cadrul circular cu N spire este:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi N(\Delta L)}{\lambda'} \quad (8)$$

adică

$$\Delta\varphi = \frac{8\pi^2 N\Omega}{c'\lambda'} \quad (9)$$

d. Figura 3 evidențiază rotația conturului triunghiular în sensul acelor de ceasornic cu viteza unghiulară Ω .

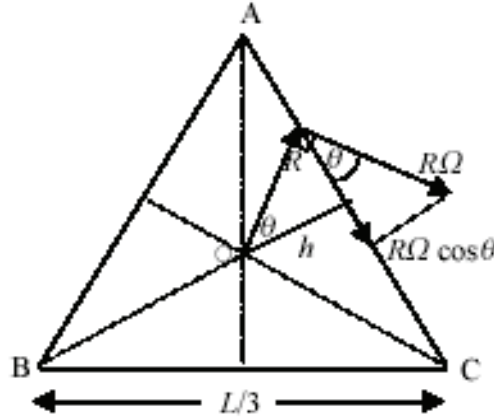


Figura 3

Componenta vitezei luminii de-a lungul laturii AC corespunzătoare propagării acesteia în sensul acelor de ceasornic (respectiv în sens invers acelor de ceasornic) este:

$$v_{\pm} = c \pm R\Omega \cos \theta = c \pm \Omega h \quad (10)$$

Durata parcurgerii de către fasciculele laser a laturii AC în sensul acelor de ceasornic (respectiv în sens invers) este

$$\tau_{\pm} = \frac{L}{v_{\pm}} \cong \frac{L}{3c} \left(1 \mp \frac{\Omega h}{c} \right) \quad (11)$$

iar durata parcurgerii conturului triunghiular va fi exprimată, în cele două cazuri prin :

$$t^{\pm} = \frac{L}{v_{\pm}} \cong \frac{L}{c} \left(1 \mp \frac{\Omega h}{c} \right) \quad (12)$$

în care L reprezintă este perimetrul conturului triunghiular

În aceste condiții, expresia pentru intervalul de timp este

$$\Delta t \cong \frac{4\Omega A}{c^2} \quad (13)$$

în care prin A s-a notat aria triunghiului.

e. Frecvențele de rezonanță asociate cu lungimile efective $L_{\pm}$ ale cavității „ văzute ” de cele două fascicule laser care se propagă în sensul acelor de ceasornic, respectiv în sens invers acelor de ceasornic sunt:

$$L_{+} = c \cdot t^{+} \cong L \left(1 - \frac{\Omega h}{c} \right) \quad (14)$$

$$L_{-} = c \cdot t^{-} \cong L \left(1 + \frac{\Omega h}{c} \right) \quad (15)$$

astfel că

$$\Delta L = L_- - L_+ \cong 2L \frac{\Omega h}{c} \cong \frac{\Omega L^2}{\sqrt{3} c} \quad (16)$$

Condiția de menținere a oscilațiilor, indicată în enunțul problemei conduce la relațiile

$$v_{\pm} = \frac{m}{L_{\pm}} c, \text{ unde } m = 1, 2, 3, \dots, \quad (17)$$

iar frecvența bătailor se va exprima prin

$$\Delta \nu = \nu_- - \nu_+ = \frac{m}{L_-} c - \frac{m}{L_+} c \quad (18)$$

Utilizând aproximația $L_- \cdot L_+ \approx L^2$ se obține

$$\Delta \nu \cong m c \frac{\Delta L}{L^2} \cong \nu \frac{\Delta L}{L} \quad (19)$$

Ținând cont de relația (16) se obține

$$\Delta \nu \cong \frac{4 A}{L c} \nu \Omega \cong \frac{4 A}{L \lambda} \Omega \quad (20)$$

sau

$$\Delta \nu \cong \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L \Omega}{\lambda} \quad (21)$$

Observație:

Relația (20) exprimă formula lui Sagnac pentru rezonatori activi. La modul general această relație se exprimă prin

$$\Delta \nu \cong \frac{4 A}{P \lambda} \vec{n} \cdot \vec{\Omega} \quad (22)$$

unde A = aria delimitată de conturul parcurs de fasciculul laser

P = perimetrul (lungimea totală a traiectoriei fasciculului laser)

λ = lungimea de undă a radiației laser

$\vec{n}$ = vector normal pe suprafața de arie A

$\vec{\Omega}$ = vectorul viteză unghiulară

REZOLVARE ȘI BAREM DE EVALUARE

Problema A7(șapte) puncte

- ◆ Cele două imagini pot avea aceeași strălucire numai dacă suprafața calotei de sticlă (aflată în aer) coincide cu suprafața zonei sferice a părții de lentilă ce se află în apă . Rezultă că $h=H/2$
- ◆ Pentru o rază de lumină ce cade direct pe calota de sticlă suferind refracții la interfețele aer/sticlă și sticlă/apă putem scrie relațiile $i=nr$, $n(i-r)=n_0r'$ (vezi partea dreaptă a desenului)

- ◆ Transcriem relația $X=x_1 + x_2$ sub forma $Ri=(d-h)r'+(i-r)(h+Y)$, cu Y tinzând spre h când i tinde spre zero

- ◆ Deducerea relației
$$\frac{R}{n-1} = \frac{d-h}{n_0} + \frac{H}{n}$$

- ◆ De aici rezultă $d = \frac{Rn_0}{n-1} + \frac{H}{2} \left(1 - \frac{2n_0}{n} \right)$

- ◆ In aplicația numerică

$$d = \frac{8R}{3} - \frac{7H}{18} \approx \frac{8R}{3} \quad (\text{căci } H \text{ este f. mic})$$

- ◆ Pentru o rază de lumină ce trece normal prin interfața aer/apă, ajungând la interfața apă/sticlă și apoi la interfața sticlă/apă se pot scrie relațiile aproximative $in_0=nr$, $n(i-r)=r'n_0$ (vezi partea stângă a desenului)

- ◆ Transcriem relația $Z=z_1 + z_2$ sub forma $iR=(D-h)r'+(i-r)y$ cu y tinzând spre h când unghiul de incidență i tinde spre valoarea $\arccos(1-h/R)$

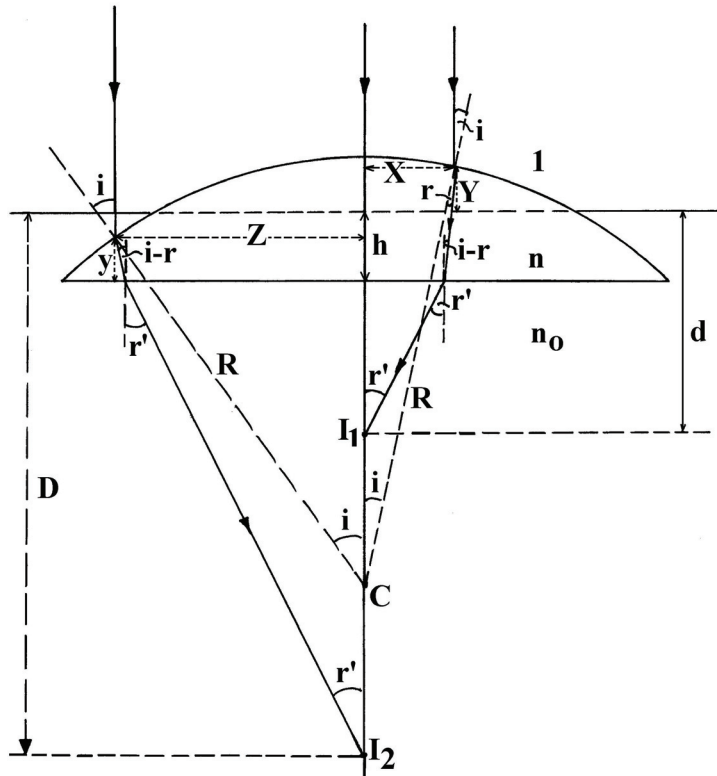
- ◆ Deducerea relației $\frac{R}{n-n_0} = \frac{D-H/2}{n_0} + \frac{H}{2n}$

- ◆ De aici $D = \frac{Rn_0}{n-n_0} + \frac{H(n-n_0)}{2n} \dots$

- ◆ In aplicația numerică $D = 8R + \frac{H}{18} \approx 8R$

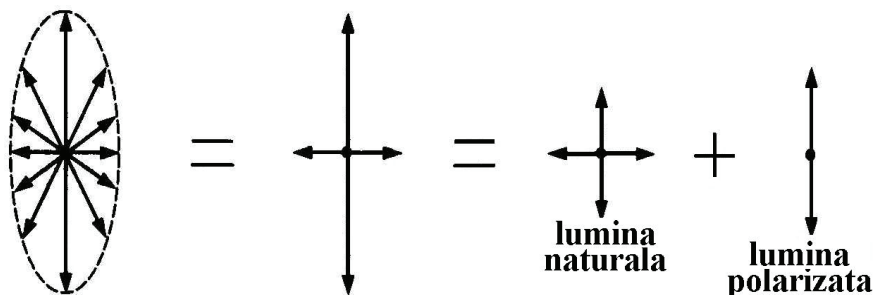
- ◆ Distanța dintre cele două imagini (focare) este $D-d = \frac{Hn_0}{2n} + \frac{n_0(n_0-1)R}{(n-n_0)(n-1)} > 0$

In aplicația numerică $D-d = \frac{16R}{3} + \frac{4H}{9} \approx \frac{16R}{3} \approx 5.33R$



Problema B3(trei) puncte

♦ Fie I_0 intensitatea luminii incidente (parțial polarizată). Conform reprezentării din figură putem scrie $I_0 = I_{nat} + I_{pol}$ astfel că gradul de



polarizare solicitat în enunțul problemei este $P = \frac{I_{pol}}{I_0} = \frac{I_{pol}}{I_{pol} + I_{nat}} = \frac{1}{1 + I_{nat}/I_{pol}}$. Prin urmare, pentru aflarea lui P trebuie determinat raportul din numitorul ultimei expresii, anume I_{nat}/I_{pol}♦

În prima situație $I_1 = 0,5I_{nat} + I_{pol} \cos^2 0 = 0,5I_{nat} + I_{pol}$.

♦ În a doua situație $I_2 = 0,5I_{nat} + I_{pol} \cos^2 \alpha$

♦ Facem raportul acestor două intensități transmise scriind $k = I_1/I_2$. De aici rezultă imediat

$$\frac{I_{nat}}{I_{pol}} = \frac{2(1 - k \cos^2 \alpha)}{k - 1}$$

♦ Revenim în expresia gradului de polarizare obținând, în cele din urmă (după puțină trigonometrie) $P = \frac{k - 1}{1 - k \cos(2\alpha)}$

♦ **Discuție:** deoarece gradul de polarizare P este cuprins între 0 și 1, raportul k al intensităților luminoase în cele două situații nu poate depăși valoarea $1/\cos^2 \alpha$ (care este, într-adevăr, o cantitate supraunitară)

Total general 10(zece) puncte

**Probleme propuse de
Prof.univ.dr. Uliu Florea
Facultatea de Fizică
Universitatea din Craiova**

SELECȚIA LOTULUI LĂRGIT
pentru
OLIMPIADA INTERNAȚIONALĂ DE FIZICĂ
Ediția a 37-a, 2006

PROBLEMA DE MECANICĂ

PLOAIA DE STELE ȘI ...DISPARIȚIA UNOR VIETŢUITOARE!

REZOLVARE

b) La distanța r față de centrul asteroidului, în interiorul acestuia ($r < R$), forța care acționează asupra corpului din tunel, reprezentată în figura 2, în acord cu legea lui Newton este:

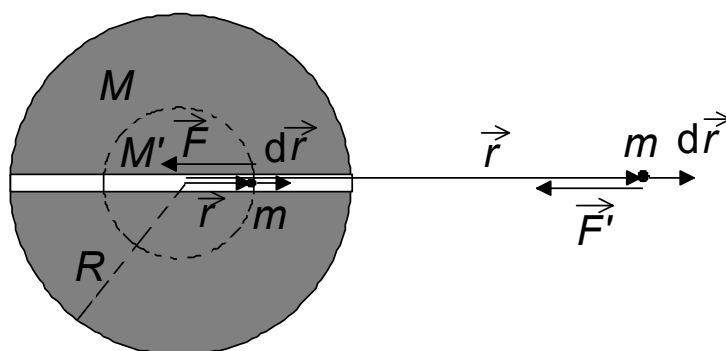


Fig. 2

$$F = K \frac{mM'}{r^2},$$

unde M' este masa sferei cu raza r ;

$$\frac{M}{R^3} = \frac{M'}{r^3}; M' = M \frac{r^3}{R^3},$$

deoarece asteroidul este omogen;

$$F = K \frac{mM}{R^3} r; k = K \frac{mM}{R^3}; \vec{F} = -k\vec{r},$$

evidențiind că aceasta este o forță „de tip elastic” (direct proporțională cu elongația și de sens contrar acesteia).

Ca urmare, mișcarea corpului în tunel, eliberat de la gura acestuia, este o mișcare oscilatorie armonică, cu perioada:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{KM}},$$

astfel încât viteza maximă a acestuia, atinsă în momentul trecerii prin centrul tunelului, este:

$$v_{\max} = \omega R = \sqrt{\frac{KM}{R}},$$

tot atât cât este viteza unui satelit care ar evolua în jurul asteroidului, pe o orbită circulară foarte joasă.

Observație: pătura sferică omogenă, cu grosimea $R - r$, nu are nici o influență gravitațională asupra corpului aflat sub aceasta.

Când corpul se află în afara asteroidului, la distanța r față de centrul acestuia, în acord cu aceeași lege a lui Newton, asupra acestuia acționează forța:

$$F' = K \frac{mM}{r^2}; \vec{F}' = -K \frac{mM}{r^3} \vec{r},$$

evidențiind o variație invers proporțională cu pătratul distanței până la centrul Pământului.

Atunci când corpul se deplasează din interiorul tunelului, de la distanța r față de centrul asteroidului și ajunge la infinit, în acord cu teorema variației energiei potențiale, avem:

$$\Delta E_{p;\text{interior}-\text{infinit}} = -\int_r^R \vec{F} d\vec{r} - \int_R^\infty \vec{F}' d\vec{r};$$

$$\Delta E_{p;\text{interior}-\text{infinit}} = \int_r^R F dr + \int_R^\infty F' dr;$$

$$\Delta E_{p;\text{interior}-\text{infinit}} = \frac{K mM}{R^3} \int_r^R r dr + K mM \int_R^\infty \frac{dr}{r^2};$$

$$\Delta E_{p;\text{interior}-\text{infinit}} = K \frac{mM}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right);$$

$$\Delta E_{p;\text{interior}-\text{infinit}} = E_{p,\infty} - E_{p,\text{interior}}; E_{p,\infty} = 0;$$

$$E_{p,\text{interior}} = -K \frac{mM}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right); \quad 0 \leq r \leq R.$$

În particular, când corpul se află în centrul asteroidului ($r = 0$), energia potențială de interacțiune gravitațională a sistemului corp – asteroid, este:

$$E_{p,0} = -\frac{3}{2} K \frac{mM}{R},$$

iar când corpul a ajuns la suprafața asteroidului, energia potențială de interacțiune gravitațională a sistemului corp – asteroid, este:

$$E_{p,R} = -K \frac{mM}{R}.$$

Atunci când corpul se deplasează din exteriorul asteroidului, de la distanța r față de centrul asteroidului și ajunge la infinit, în acord cu teorema variației energiei potențiale, avem:

$$\Delta E_{p;\text{exterior}} = -\int_r^\infty \vec{F}' d\vec{r} = \int_r^\infty F' dr = K mM \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = K \frac{mM}{r};$$

$$\Delta E_{p;\text{exterior}} = E_{p,\infty} - E_{p;\text{exterior}}; E_{p,\infty} = 0;$$

$$E_{p;\text{exterior}} = -K \frac{mM}{r}; r \geq R.$$

În particular, când corpul se află pe suprafața asteroidului ($r = R$), energia potențială de interacțiune gravitațională a sistemului corp – asteroid, este:

$$E_{p,R} = -K \frac{mM}{R}.$$

În figura 3 sunt reprezentate graficele dependențelor $F(r)$ și $E_p(r)$.

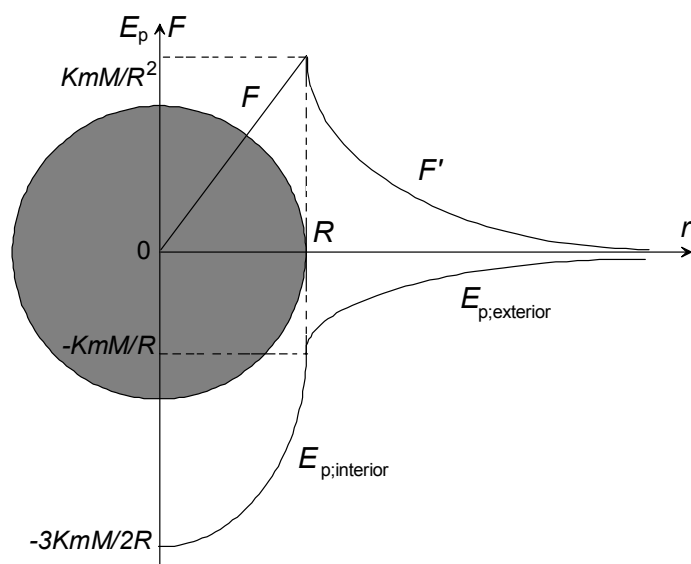


Fig. 3

c) Lansat din centrul asteroidului, corpul trebuie să poată ajunge la gura tunelului și de aici, părăsind tunelul, corpul trebuie să poată sosi undeva foarte departe de asteroid. Corespunzător notațiilor din figura 4, în acord cu legea conservării energiei mecanice, rezultă:

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} - \frac{3}{2}K \frac{mM}{R} = \frac{mv^2}{2} - K \frac{mM}{R};$$

$$v^2 = v_{\min}^2 - \frac{KM}{R};$$

$$\frac{mv^2}{2} - K \frac{mM}{R} = 0; v^2 = 2 \frac{KM}{R};$$

$$v_{\min} = \sqrt{3 \frac{KM}{R}}.$$

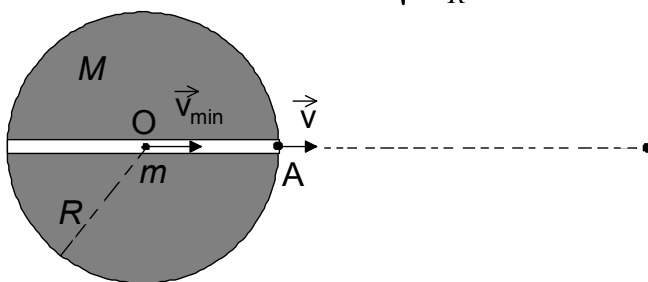


Fig. 4