



SUBIECTE PROPUSE PENTRU ETAPA LOCALĂ  
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2015

**CLASA aV-a**

**Problema 1. (7 puncte)**

Fie numerele naturale  $x$  și  $y$  care satisfac relația:  $5x + 3y = 2015$ .

- Arătați că suma celor două numere nu poate fi 462.
- Aflați cele două numere știind că suma lor este 463.

**Problema 2. (7 puncte)**

Arătați că dublul sumei numerelor naturale, care împărțite la 2015 dau câtul egal cu restul, nu este pătrat perfect.

**Problema 3. (7 puncte)**

Determinați elementele mulțimilor  $A$  și  $B$  dacă sunt satisfăcute simultan condițiile:

- $A$  are trei elemente numere naturale pare consecutive;
- $B$  are trei elemente numere naturale impare consecutive;
- Cel mai mic element al mulțimii  $B$  este succesorul celui mai mare element al mulțimii  $A$ ;
- Suma elementelor mulțimii  $A \cup B$  este egală cu 2043.

**Problema 4. (7 puncte)**

Mulțimea numerelor naturale impare se împarte în submulțimi astfel:  
 $\{1\}$ ,  $\{3,5\}$ ,  $\{7,9,11\}$ ,  $\{13,15,17,19\}$ , ...

- Aflați care este primul număr din cea de a 2014-a submulțime.
- Există o submulțime de acest tip care începe cu 2013? Justificați răspunsul.

- **Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii
- Timp de lucru: 2 ore
- Total: 28 puncte (nu se acordă punct din oficiu)



## SUBIECTE PROPUSE PENTRU ETAPA LOCALĂ

### Olimpiada de matematica - 2015

**CLASA aVI-a****Subiectul I (7 puncte)**

a) Sa se determine  $a, b \in \mathbb{N}, a < b$  pentru care  $[a, b] = 540$  si  $(a, b) = 18$

b) Aratati ca :  $\frac{1}{1 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 25} + \frac{1}{25 \cdot 37} + \dots + \frac{1}{2005 \cdot 2017} < \frac{1}{12}$

**Subiectul II (7 puncte)**

Aratati ca :  $3^{2014} + 4^{2014} < 5^{2014}$

G.M

**Subiectul III (7 puncte)**

Pe o dreapta a se considera punctele  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{2015}$  astfel incat  $A_0A_1 = A_1A_2, A_0A_2 = A_2A_3, A_0A_3 = A_3A_4, \dots, A_0A_{2014} = A_{2014}A_{2015}$  Stiind ca  $A_{2014}A_{2015} = 2^{2014}$  cm, calculati  $A_0A_1, A_{2005}A_{2015}$  si determinati cel mai mic numar natural  $k$  asa incat  $A_0A_k > 1$  km

**Subiectul IV (7 puncte)**

Fie unghiul propriu  $XOY$  si punctele  $A, C \in Ox$ , iar  $B, D \in Oy$  asa incat  $[OA] = [OB]$  si  $[AC] = [BD]$  și  $A$  între  $O$  și  $C$ ,  $B$  între  $O$  și  $D$ . Stiind ca  $AD \cap BC = \{P\}$ , demonstrati ca: a)  $[AP] = [PB]$

b)  $[OP]$  este bisectoarea unghiului  $XOY$

c) punctele  $O, P, M, N$  sunt coliniare, unde  $M$  si  $N$  sunt mijloacele segmentelor  $[AB]$  respectiv  $[CD]$

- **Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii
- Timp de lucru: 2 ore
- Total: 28 puncte (nu se acordă punct din oficiu)

SUBIECTE PROPUSE PENTRU ETAPA LOCALĂ  
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2015

**CLASA aVII-a**

**Problema 1. (7 puncte)**

a). Să se calculeze:

$$A = \frac{4-2}{3 \cdot 1} + \frac{6-4}{5 \cdot 3} + \frac{8-6}{7 \cdot 5} + \dots + \frac{2016-2014}{2015 \cdot 2013}.$$

b). Determinați cel mai mic număr întreg care este mai mare decât  $x$ , unde

$$x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{10} + \sqrt{12} + \sqrt{16} + \sqrt{20}}{2 + \sqrt{3} + \sqrt{5}}.$$

**Problema 2. (7 puncte)**

Fie numerele  $a_1 = \sqrt{1}$ ,  $a_2 = \sqrt{3+5}$ ,  $a_3 = \sqrt{7+9+11}$ ,

$a_4 = \sqrt{13+15+17+19}$ , ... .

a). Calculați  $a_9$ .

b). Câte numere  $a_k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $k \leq 2015$ , sunt numere iraționale.

**Problema 3. (7 puncte)**

În paralelogramul  $ABCD$  cu  $AB = 2 \cdot BC$ , se construiește  $[AM]$  bisectoarea  $\angle DAB$ ,  $M \in [DC]$ . Perpendiculara în  $A$  pe  $AM$  intersectează  $BC$  în  $N$ . Dacă  $MN \cap AB = \{P\}$ , aflați valoarea raportului  $\frac{AP}{PB}$ .

**Problema 4. (7 puncte)**

În triunghiul  $ABC$  cu  $m(\angle A) = 90^\circ$  și  $m(\angle C) = 30^\circ$  considerăm bisectoarea  $[BE]$ ,  $E \in [AC]$  și un punct  $D$  pe  $[BC]$  astfel încât  $BC = 3 \cdot BD$ . Dacă  $\{O\} = BE \cap AD$  și  $F$  este mijlocul lui  $[AB]$ , arătați că  $F$ ,  $O$  și  $C$  sunt coliniare.

- **Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii
- Timp de lucru: 3 ore
- Total: 28 puncte (nu se acordă punct din oficiu)



## SUBIECTE PROPUSE PENTRU ETAPA LOCALĂ OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2015

### CLASA aVIII-a

#### Subiectul I. (7 puncte)

a) Demonstrați egalitatea:  $\frac{k}{\sqrt{n(n+k)}(\sqrt{n+k} + \sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+k}}; (\forall) n, k \in \mathbb{N}^*$

b) Aflați  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât:

$$\frac{13}{\sqrt{1 \cdot 14}(\sqrt{14} + \sqrt{1})} + \frac{13}{\sqrt{14 \cdot 27}(\sqrt{27} + \sqrt{14})} + \dots + \frac{13}{\sqrt{n(n+13)}(\sqrt{n+13} + \sqrt{n})} = \frac{39}{40}$$

#### Subiectul II. (7 puncte)

Calculați:  $\left[ (5 - 2\sqrt{6})^{2015} + \frac{1}{(5 + 2\sqrt{6})^{2015}} \right] \cdot \frac{(10 + 4\sqrt{6})^{2015}}{2^{2016}}$

b) Determinați  $a, b \in \mathbb{Q}$ , astfel încât:  $a(\sqrt{3} + 2) + \sqrt{3} = b(2\sqrt{3} + 1) + 3$

#### Subiectul III. (7 puncte)

În triunghiul ABC se cunosc:  $AB = AC = 2\sqrt{6} \text{ cm}$  și  $m\angle(BAC) = 45^\circ$ . Se construiește  $MB \perp (ABC)$ ,  $MB = 2 \text{ cm}$ .

Calculați: a)  $d(M, AC)$ ; b)  $d[B, (MAC)]$ ; c)  $\cos \angle[(MAC), (MBA)]$

#### Subiectul IV. (7 puncte)

Fie piramida patrulateră regulată  $VABCD$ ,  $\{O\} = AC \cap BD$  și  $P, Q \in (VO)$ .

Dacă  $\{E\} = AP \cap CV$ ,  $\{F\} = CP \cap AV$ ,  $\{S\} = BQ \cap DV$  și  $\{T\} = DQ \cap VB$ .

Arătați că măsura unghiului dintre dreptele  $EF$  și  $ST$  nu depinde de alegerea punctelor  $P$  și  $Q$  pe segmentul  $VO$ . G.M.

- **Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii
- Timp de lucru: 3 ore
- Total: 28 puncte (nu se acordă punct din oficiu)